

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2014

課題番号：25610029

研究課題名(和文) 体積保存型反応拡散系に現れるスポット運動の数理解析

研究課題名(英文) Spot dynamics of the volume preserving reaction-diffusion systems

研究代表者

長山 雅晴 (Nagayama, Masaharu)

北海道大学・電子科学研究所・教授

研究者番号：20314289

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：形状が固定された粒子運動モデルと形状が変形する液滴運動モデルについて数理解析をおこなった。特に、形状変化する液滴運動として体積保存性を持つフェーズフィールド方程式を含む2変数反応拡散系モデルを提案し、この系に現れるパターンダイナミクスについて計算機援用解析を行った。この数理モデルでは、あるパラメータを変化させることで安定な定常スポット解から進行スポット解が分岐することがわかった。さらに、進行スポット解が不安定し、振動進行スポットが出現することもわかった。また、安定な楕円形状定常解や安定なピーナッツ形状定常解が存在することが明らかになった。

研究成果の概要(英文)：We have performed a mathematical analysis of model equations for fixed-form particle motions, as well as for one that utilizes droplet-like motions to incorporate shape deformations. In particular, droplet deformations are incorporated through the combination of a volume preserving phase-field equation within a two-component reaction diffusion system. By use of computer-aided analysis, we have also investigated the pattern dynamics within the mathematical model. We observe a parameter for which traveling spots bifurcate from stable standing spot solutions. Traveling spots, moreover, destabilize by means of a Hopf bifurcation, which leads to the appearance of an oscillatory travelling spot. We have also clarified the existence of stable elliptical-shaped and peanut-shaped equilibrium solutions.

研究分野：応用数学

キーワード：体積保存型反応拡散系 振動進行スポット 自励往復運動スポット 楕円形状定常解 ピーナッツ形状定常解

1. 研究開始当初の背景

液滴運動を記述する数理モデルを構築するためには、少なくとも液滴を表現するモデルと水面あるいはガラス表面等の液滴が運動する場のモデル(運動場モデル)を記述する必要がある。その中で液滴を表現するモデルの候補として体積保存型反応拡散系が挙げられる。このモデルは反応拡散系が持つスポット解の性質を利用した液滴の表現方法であり、スポット解とは空間2次元反応拡散系に現れる孤立した解のことを指している。このスポット解の出現は、FitzHugh-Nagumo型反応拡散系にある拘束条件を課した系に対して、A.Mikhailovらが最初に報告した。また、H.-G.Purwinsらによって3変数反応拡散系によっても出現することが報告された。しかしながら、これらの研究で発見された安定スポット解は初期値に依存することなくただ一つであり、液滴の初期体積に依存した液滴運動を表現する数理モデルとしては不十分であった。粘菌運動の表現モデルとして小林亮教授(広島大学)によって提案された体積保存型反応拡散方程式は、初期体積を保存することから液滴表現モデルとしても適当だと考えられた。この体積保存型反応拡散方程式を基盤として液滴運動モデルを構築し、液滴運動の再現を試みた結果、これまでの反応拡散系に見られたスポット運動とは全く異なるスポット運動を発見した。このようなスポット運動の出現機構は未知であり、出現機構の数理解析や数理モデル構築の視点からも重要な問題であると考えられる。

2. 研究の目的

近年、自ら駆動力を発生し運動するアクティブマターと呼ばれる自走運動実験系が多く報告されている。そこでは、変形を伴わない固体運動から、変形を伴う液滴運動まであり、さらに化学反応と結合させることで複雑な運動を起こす運動系まで提案されている。これらの運動を理論的に解析することによって、自走運動系に生じる運動形態を予測する。さらに、実験と相補的な研究を行うことによって自走運動系の数理科学を展開する。ここでは、形状が固定された自走運動系として楕円樟脳の運動について数理解析を行う。そして、形状変形を伴う自走運動系として、液滴運動について数理解析を行う。

3. 研究の方法

(1) 形状変形を伴わない系に対する数理解析
楕円樟脳運動の実験から楕円樟脳は回転することなく、並進運動をすることが見て取れるため、最初に回転運動が起きない場合を考える。数理モデルに対する数値実験によって、楕円樟脳の運動の種類を調べる。次に、数値

的に定常解の安定性と分岐点を調べ、数理モデルから示唆される運動について明らかにする。次に、円形状からの微小な摂動によって楕円形状になる場合について摂動計算を行うことによって理論的に分岐点を求める。続いて、楕円樟脳の実験データを取り、解析結果と比較することによって数理モデルの正当性を明らかにする。最後に、回転運動と並進運動の両方が起こる場合を考え、楕円樟脳の運動形態の多様性を数値計算によって調べる。

(2) 形状変化を伴う系に対する数理解析

体積保存型反応拡散系モデルに現れる運動形態を数値計算によって明らかにする。先ず、定常解の構造を明らかにし、定常解から分岐する解の種類を調べる。次に、分岐した解の運動を詳しく調べることによって、体積保存型反応拡散系モデルに現れる解の種類を特定する。そして、液滴運動に現れる運動形態と比較することによって数理モデルが液滴運動を表現することが可能かどうか明らかにする。数理モデルとして適当であるならば、次に、可能ならば定常解の解構造とその安定性を数値的に調べ、モデル方程式に現れる解の出現機構を明らかにする。

4. 研究成果

(1) 形状変化を伴わない系に対する数理解析

形状が運動に与える影響を考察するために楕円形状固体の運動に対する解析を行った。並進と回転の運動を記述する数理モデルに対して数値計算から、安定な停止解から短軸方向に並進する運動が最初に分岐すること、そして不安定な定常解から長軸方向に並進する運動が分岐することを明らかにした(図1)。楕円への変形率(長軸長/短軸長)と粘性係数をパラメータとして分岐点を求めた結果、必ず短軸方向に運動する解が最初に分岐することがわかった。この結果を理論的に示すために、円形状から微小な楕円形状への変形問題を考え、摂動展開計算を行い、分岐解析を行った結果、数値実験と同様に、短軸方向への運動が安定に分岐することがわかった。この結果を実験的に検証するために、楕円樟脳の運動実験を行った。この結果、楕円樟脳はほとんど短軸報告に運動することがわかった。これらのことから、我々の数理モデルの解析は実験結果を反映していることが立証された。数理モデリング、解析、実験検証という一連の研究が成功した例は国内外において多くは無く、今後の発展が期待できる。特に、自走運動系に対して数理モデリングの構築と解析、および実験予測が可能となったことから、今後、自走運動系実験に対する理論解析が大きく進展する可能性が示された。

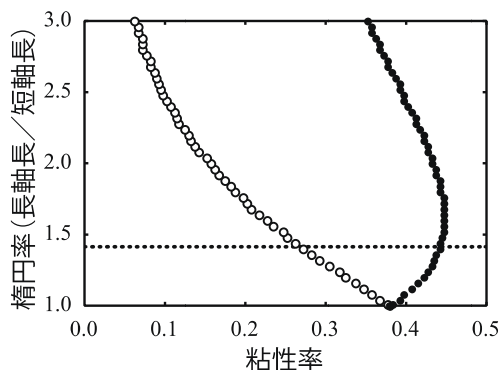


図1：楕円率に依存した定常解からの分岐点、粘性率が高い場所では定常解が安定であり，点で不安定化する．は短軸方向に運動を始める分岐点，は長軸好方向に運動を始める分岐点

(2) 形状を伴う系に対する数理解析

化学反応を伴う液滴運動を記述する数理解析モデルを構築するための基盤として、体積保存性を持つフェーズフィールド方程式と線形反応拡散方程式の結合した2変数反応拡散系を構築し、数値計算によってこの系に現れるパターンダイナミクスについて計算機援用解析を行った。この系では、あるパラメータを変化させることで安定な定常スポット解から Drift 分岐によって不安定化し、この分岐点から並進運動する進行スポット解が分岐することが示唆された。同様の結果は1994年にある反応拡散系に現れることが知られていた。しかし我々の系においては、進行スポット解はパラメータをさらに変化させると、Hopf 分岐を起こすことがわかり、その Hopf 分岐点から振動進行スポットが出現することもわかった。また、この系では自励往復運動するスポット解も出現することが明らかになった。詳しく調べた結果、自励往復運動スポットは、振動進行スポットの振動がパラメータ変化によって次第に大きくなり、進行方向が反転する結果から出現することが明らかになった。また、非対称性が高い自励往復スポットも発見され、このほかにも公転運動も見られることから、この系には多彩なスポット運動解を持っていることが明らかになった。これらの解の出現機構を分岐現象として捕らえる第一歩として定常解の構造を調べた結果、安定な楕円形状定常解（図2(a)）やピーナツ形状定常解（図2(b)）が存在することが明らかになった。これらの解の数学的な存在や安定性解析は今後の課題である。

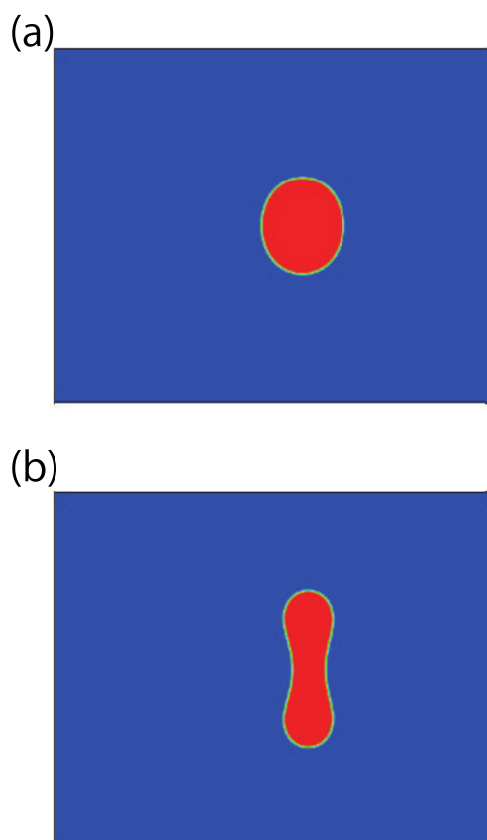


図2：体積保存型反応拡散系モデルに現れる安定定常解。(a)楕円形状定常解,(b)ピーナツ形状定常解

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計11件)

S. Nakata, M. Nagayama, H. Kitahata, N. J. Suematsu and T. Hasegawa, "Physicochemical design and analysis of self-propelled objects that are characteristically sensitive to interfacial environments", *Physical Chemistry Chemical Physics*, 7(2015)10326-10338. DOI:10.1039/C5CP00541H. (査読有)

S.-I. Ei, K. Ikeda, M. Nagayama and A. Tomoeda, "Application of a center manifold theory to a reaction-diffusion system of collective motion of camphor disks and boats", *Mathematica Bohemica* 139(2)(2014)363-371. DOIなし, URL: <http://mb.math.cas.cz/mb139-2/20.html> (査読有)

長山雅晴, 若井健, 小林康明, 西慧, 井倉 S. 弓彦, 中田聡, "樟脳円盤の集団運動に対する計算機援用解析", 計算工学講演会論文集, 19(2014), DOI なし, URL なし, CD-ROM(査読無)

K. Iida, H. Kitahata and M. Nagayama, "Theoretical study on the translation and rotation of an elliptic camphor particle", Physica D, 272(2014)39-50, DOI:10.1016/j.physd.2014.01.005. (査読有)

M. Yadome, Y. Nishiura and T. Teramoto, "Robust pulse generators in an excitable medium with jump-type heterogeneity", SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 13(2014) 1168-1201. DOI:10.1137/13091261X(査読有)

S. Nakata, T. Miyaji T. Ueda, T. Sato, Y. S. Ikura, S. Izumi and M. Nagayama, "Reciprocating motion of a self-propelled object on a molecular layer with a local minimum and a local maximum isotherm", Journal of Physical Chemistry C, 117(2013) 6346-6352, DOI:10.1021/jp400971h. (査読有)

H. Kitahata, K. Iida and M. Nagayama, "Spontaneous motion of an elliptic camphor particle", Physical Review E, 87(2013)010901, DOI:10.1103/PhysRevE.83.056207(査読有)

飯田溪太, 北畑裕之, 長山雅晴, "樟脳粒の自発運動: 粒子形状と運動の関係について", 計算工学講演会論文集, 18(2013), DOI なし, URL なし, CD-ROM (査読無)

B. Lou, H. Matano and K.-I. Nakamura, "Recurrent traveling waves in a two-dimensional saw-toothed cylinder and their average speed", Journal of Differential Equations, 255(10) (2013)3357-3411. DOI:10.16/j.jde.2013.07.038(査読有)

H. Matsuoka and K.-I. Nakamura, "A stable finite difference method for a Cahn-Hilliard type equation with long-range interaction", The Science Report of the Kanazawa University, 57 (2013)13-34. DOI なし,

URL:
<http://hdl.handle.net/2297/36870>
(査読有) .

K. Nishi, Y. Nishiura and T. Teramoto, "Dynamics of two interfaces in a hybrid system with jump-type heterogeneity", Japan Journal of Applied and Industrial Mathematics 30 (2013) 351-395. DOI:10.1007/s13160-013-0100-x (査読有)

[学会発表] (計 2 0 件)

長山雅晴, The collective motion of camphor papers in a cylindrical channel, One-day Workshop on Applied Mathematics, Tamkang University, Taipei(Taiwan), 2015 年 3 月 5 日 (招待講演) .

長山雅晴, 自走粒子系に現れる集団運動の数理解析, 研究集会, 加太国民休暇村 (和歌山県・加太市), 2014 年 12 月 26 日~28 日 (招待講演) .

長山雅晴, 数値分岐計算について, 応用数学勉強会 2014, 神戸大学 (兵庫県・神戸市), 2014 年 12 月 11 日~13 日 (招待講演) .

長山雅晴, 燃焼合成反応と焼結問題に対する数理モデリングについて, サステナブル理工学研究センターシンポジウム, 東北大学 (宮城県・仙台市), 2014 年 11 月 5 日 (招待講演) .

長山雅晴, 自走粒子の集団運動に対する数理解析, 非線形数理セミナー, 明治大学 (神奈川県・川崎市), 2014 年 9 月 9 日 (招待講演) .

長山雅晴, 樟脳円盤の集団運動に対する数理解析, 北大 MMC & 旭医大 L&M セミナー, 旭川医科大学 (北海道・旭川市), 2014 年 7 月 16 日 .

長山雅晴, "The collective motion of camphor papers in a cylindrical channel, The 10th AIMS Conference on Dynamical systems, Differential Equations and Applications, Madrid(Spain), 2014 年 7 月 7 日~11 日 (招待講演) .

西慧, 樟脳円盤の集団運動に対する数理解析, 日本計算工学講演会, 広島国際会議場 (広島県・広島市), 2014 年 6 月 11 日~13 日 .

長山雅晴,樟脳円盤の集団運動に対する数理解析,日本数学会年会,学習院大学(東京都・豊島区),2014年3月15日~18日.

長山雅晴,円環水路での樟脳ろ紙の集団運動について,非線形現象の数値シミュレーションと解析 2014,北海道大学(北海道・札幌市),2014年3月7日~8日.

西慧,円環水路の樟脳ろ紙集団の分岐解析,応用数学合同研究集会,龍谷大学(滋賀県・大津市),2013年12月19日~21日.

長山雅晴,自走粒子の数理解析とその解析,櫻井・北畑研究室セミナー,千葉大学理学研究科(千葉県・千葉市),2013年10月29日.

長山雅晴,Mathematical analysis of the collective motion of camphor disks, 2013 Northeastern Asian Symposium on High Performance Computing Method and Modeling, Chengdu(China), 2013年9月23~24日(招待講演).

若井健,自己駆動粒子の集団運動に対する数理解析,日本応用数学会(ポスター講演),アクロス福岡(福岡県・福岡市),2013年9月10日.

飯田溪太,樟脳粒の自発運動:粒子形状と運動の関係について,計算工学講演会,東京大学(東京都・目黒区),2013年6月19日~21日.

中村健一,Dynamics of fronts in multistable reaction-diffusion equations,SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, Hilton Orlando Lake Buena Vista(USA), 2013年12月7日(招待講演).

中村健一, A mathematical formulation of the discrete variational derivative method for dissipative systems, Gaeta(Italy), 2014年5月27日(招待講演).

寺本敬, Heterogeneity-induced pulse generators in a generalized FitzHugh-Nagumo system, IMA Workshop Joint US-Japan Workshop for Young Researchers on Interactions among Localized Patterns in Dissipative

Systems, Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis(USA), 2013年6月3日(招待講演).

寺本敬, Dynamics of two interfaces on a hybrid system with jump-type heterogeneity, IMA Workshop Joint US-Japan Workshop for Young Researchers on Interactions among Localized Patterns in Dissipative Systems(Poster), Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis(USA), 2013年6月3日.

寺本敬, What is the origin of rotational motion in dissipative systems? , IMA Workshop Joint US-Japan Workshop for Young Researchers on Interactions among Localized Patterns in Dissipative Systems(Poster), Institute for Mathematics and its Applications, Minneapolis(USA), 2013年6月4日.

〔図書〕(計 1件)

長山雅晴,樟脳船の数理解析,数学セミナー,8--12,2015年2月号.

〔その他〕

長山雅晴,公開講座 JST 数学キャラバン 第13回 拡がりゆく数学 in 水戸,講師,2014年11月29日.

長山雅晴,出張講義(札幌日本大学高等学校)国民との科学・技術対話事業(2014年11月27日) 広がる数学 V(岡山),講師 (JST 数学キャラバン 共催),2014年,11月24日.

長山雅晴,秋山正和,SSH 札幌啓成高等学校,講義と実験,2014年9月12日. 長山雅晴,JST 数学キャラバン 第10回 拡がりゆく数学 in 北海道,主催,2014年8月9日.

長山雅晴,出張講義(札幌日本大学高等学校)国民との科学・技術対話事業,2013年11月7日.

長山雅晴,出張講義(立命館慶祥高校)国民との科学・技術対話事業,2013年10月9日.

研究成果掲載 Web サイト
<http://www-mm.es.hokudai.ac.jp/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

長山 雅晴 (NAGAYAMA Masaharu)
北海道大学・電子科学研究所・教授
研究者番号：20314289

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

中村 健一 (Nakamura Ken-Ichi)
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：40293120

寺本 敬 (TERAMOTO Takashi)
旭川医科大学・医学部・准教授
研究者番号：40382543