

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 27 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610032

研究課題名(和文) 四色定理の理論的別証を導く切断多面体の正規性予想の肯定的解決への挑戦

研究課題名(英文) A challenge of solving the normality conjecture for cut polytopes affirmatively which yields a theoretical proof of the four color theorem

研究代表者

日比 孝之 (HIBI, Takayuki)

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：80181113

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本挑戦的萌芽研究の目的は、研究代表者らの従来研究成果を踏襲し、切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦することであった。切断多面体の正規性予想が、特に、組合せ論の研究者を魅惑するのは、「切断多面体の正規性予想が肯定的ならば、四色定理が従う。」という結果(David E. Speyer)に負う。研究代表者は、切断多面体の膨らましの組合せ論の観点、および、切断イデアルのグレブナー基底のイニシャルイデアルの観点から、切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦するとともに、否定的な解決も視野に入れながら、切断多面体と切断イデアルの多角的な研究を展開した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of the present research was, following the established techniques due to the principal investigator together with his colleagues, to face a challenge of solving the normality conjecture for cut polytopes affirmatively. The reason why the normality conjecture for cut polytopes fascinates the combinatorialists is the fact, due to David E. Speyer, that the affirmative answer of the normality conjecture for cut polytopes guarantees the four color theorem. We have faced a challenge of solving the normality conjecture for cut polytopes affirmatively from the viewpoint of combinatorics on dilated cut polytopes as well as that of initial ideals of Gröbner bases of cut ideals. Furthermore, with taking into account the negative answer of the normality conjecture for cut polytopes, we have developed the various studies on cut polytopes and cut ideals.

研究分野：計算可換代数と組合せ論

 キーワード：切断多面体 切断イデアル 正規多面体 正則単模三角形分割 トーリックイデアル グレブナー基底
イニシャルイデアル 実験計画

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、1983年以降、凸多面体と単体的複体の組合せ論の具象論を、可換代数のテクニック、特に、Cohen-Macaulay環の抽象論を駆使し、発展させることに成功した。

その後、1996年以降、大杉英史とともに、グレブナー基底の代数的基礎理論、特に、有限グラフに付随する凸多面体のトーリックイデアルのグレブナー基底の理論を樹立し、凸多面体の三角形分割の代数的組合せ論を飛躍的に深化させるとともに、統計モデルのマルコフ基底の研究を展開している。

他方、1995年以降、欧州の可換代数の権威者 Jürgen Herzog らとともに、squarefree な単項式で生成されるイデアルの理論を展開し、componentwise linear イデアルの概念を提唱し、Alexander duality の有効性を披露した。なお、Jürgen Herzog との仕事は、単行本 [J. Herzog and T. Hibi, "Monomial Ideals," GTM 260, Springer, 2011] に集約されている。

凸多面体の頂点が整数点(「格子点」とも言う)であるとき、その凸多面体を整凸多面体と呼ぶ。空間 R^d に属する整凸多面体 P が正規である(「整分割性を持つ」とも言う)とは、任意の整数 $n = 1, 2, \dots$ と任意の整数点 nP について、 $nP = \sum_{i=1}^n P_i$ となる整数点 P_1, \dots, P_n が存在するときに言う。但し、 $nP = \{n \cdot x \mid x \in P\}$ である。

整凸多面体の正規性は、可換代数、代数幾何などの純粋数学とともに、整数計画問題、計算代数統計などの応用数学の諸分野においても重要な概念であり、その探究の歴史は古い。しかしながら、著名な整凸多面体の正規性が着目され、時代の潮流に沿う研究が展開されるようになったのは、有限グラフの辺凸多面体の正規性に関する、研究代表者と大杉英史の論文[H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, J. Algebra 207 (1998), 409--426]の影響がきわめて大きい。

研究代表者は、科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業(CREST)の研究課題「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(通称、日比プロジェクト;平成20年10月~平成26年3月)の研究代表者を務め、グレブナー基底を巡る、理論(可換代数)応用(統計)計算(D加群)の融合分野の創成に成功している。

2. 研究の目的

整凸多面体の正規性を巡る未解決な予想の一つに、Sturmfels と Sullivant (2008年)が提唱した、切断多面体の正規性予想と呼ばれる予想「有限グラフに付随する切断多面体が正規であるための必要十分条件は、その有限グラフが5次の完全グラフ K_5 をマイナーとして持たないことである。」がある。切断多面体の正規性予想は、それ自身、トーリックイデアルの可換代数からも、凸多面体の代

数的組合せ論からも、極めて興味深い予想であるが、特に、組合せ論の研究者を魅惑するのは、ミシガン大学の David E. Speyer が指摘したように、「切断多面体の正規性予想が肯定的ならば、四色定理が従う。」という結果に負う。なお、切断多面体が正規ならば、その有限グラフが K_5 をマイナーとして持たないことは既知である。

本挑戦的萌芽研究の目的は、研究代表者らの従来の研究成果を踏襲し、切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦することである。切断多面体の正規性予想を肯定的に解決することに成功したならば、その帰結として、四色定理の理論的別証が得られることとなり、現代数学における影響は、想像を絶するものとなる。

3. 研究の方法

頂点集合 $[n] = \{1, \dots, n\}$ 上の連結な有限単純グラフ G の辺の集合を E とする。部分集合 $S \subseteq [n]$ と G の辺 $e = \{i, j\}$ があつたとき、 $(S; e)$ を、 $|S \cap e| = 1$ ならば $(S; e) = 1$ とし、それ以外は $(S; e) = 0$ と定義する。すると、 $(S; e) = \chi_{[n]}(S; e)$ である。いま、行が G の辺で、列が部分集合 $S \subseteq [n]$ で添字付けられた $|E|$ 行 2^n 列の行列(但し、 S と $[n] \setminus S$ を同一視する)を G の切断行列と呼ぶ。切断行列の 2^n 個の列ベクトルの空間 $R^{|E|}$ における凸閉包を G の切断多面体と呼ぶ。切断多面体のトーリックイデアルを切断イデアルと呼ぶ。

以下、本挑戦的萌芽研究の目的を達成するための、戦略を列挙する。

(1) 整凸多面体が正規であることを示すための、もっとも有効なテクニックは、その整凸多面体の単模(unimodular)三角形分割の存在を示すことである。一般に、整凸多面体が正則単模三角形分割を持つことと、そのトーリックイデアルが squarefree なイニシャルイデアルを持つことは同値である。すると、有限グラフが K_5 をマイナーとして持たないとき、その切断イデアルが squarefree なイニシャルイデアルを持つことを示すことができれば、切断多面体の正規性予想は肯定的に解決される。

(2) 切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦することが研究の目的ではあるものの、研究の方向を転換し、否定的解決も視野に入れながら、研究を展開することも考慮する。その際は、切断多面体の膨らましに属する整数点の状況を厳密に把握することから、反例の候補となる有限グラフを列挙し、それらの切断多面体の正規性を計算ソフトで検証することとなる。

(3) 切断イデアルは、実験計画とも関連することが判明し、目下、その研究を、研究代表者と大杉英史、青木敏が遂行している。実験計画イデアルの類は切断イデアルの類を含むことから、たとえば、切断イデアルの正規性予想を実験計画イデアルの正規性予想に一般化する。

4. 研究成果

本挑戦的萌芽研究の目的は、研究代表者らの従来の研究成果を踏襲し、切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦することであった。残念ながら、切断多面体の正規性予想の肯定的な解決、あるいは、否定的な解決に至ることはなかった。しかしながら、その研究経過から、トーリックイデアル、整凸多面体の正規性、実験計画に関連する幾つかの顕著な結果を得ることができた。以下、その研究成果を列挙する。

(1) 研究代表者らの従来からの研究を踏襲し、有限グラフに付随する辺凸多面体、及び、そのトーリックイデアルに関する研究を深化させた。特に、辺凸多面体を超平面で切断したときの正規性とグレブナー基底の二次生成に関する結果を得た(論文[1])。その類似の試みを切断多面体にも試みたが、十分に満足できる成果に至ることはなかった。

(2) 研究代表者と青木敏、大杉英史は、有限グラフの切断イデアルの計算代数統計への斬新な応用を提唱した(論文[2])。すなわち、2水準の正則な一部実施計画の定義関係式が或る有限グラフのサイクルと対応する場合、切断イデアルの生成系がマルコフ基底となることを証明した。

(3) 研究代表者らは、1997年、二次生成であるが二次グレブナー基底を持たない辺凸多面体の例を発見しているが、そのような辺凸多面体の無限系列を構成することに成功した(論文[3])。

(4) 研究代表者と Jürgen Herzog が導入した、有限グラフの二項式辺イデアルの概念を一般化し、有限グラフの対に付随する二項式辺イデアルを提唱し、その代数的諸性質を研究した(論文[4])。

(5) 切断多面体の正規性予想の肯定的な解決に挑戦する戦略の一つとして、切断多面体の膨らましを議論した。その探究を基礎としながら、研究代表者と東谷章弘らは、一般の格子凸多面体の膨らましの整分割性を研究し、特に、膨らまし kP が整分割性を持つような正の整数 k を決定する問題を考察し、顕著な成果を得た(論文[5])。

(6) 有限グラフの辺イデアルの正則度は、昨今、可換代数におけるもっとも流行している話題の一つである。研究代表者と東谷章弘らは、有限グラフのマッチングと辺イデアルの正則度の関係に着目し、マッチングの極大サイズと誘導マッチングの極大サイズが一致する有限グラフ(Cameron--Walker グラフ)を研究し、Cohen--Macaulay となるものを分類した(論文[7])。その研究を発展させ、支配的誘導マッチングを持つ有限グラフの探究が、可換代数と組合せ論の両面から展開されている(arXiv:1412.3881)。

(7) 切断イデアルはトーリックイデアルであるが、必ずしも、トーリックイデアルとは限らない二項式イデアルの著名な類の一つに、ポリオミノイデアルがある。研究代表者

と Jürgen Herzog らは、線型関係を持つ凸なポリオミノイデアルを分類した(論文[8])。

(8) 研究代表者と Nan Li らは、半開超単体の面の数え上げを探究し、その f 列と母関数を計算し、更に、単位立方体の超単体分割の f 列と Chebyshev 多項式の間で組合せ論的な関係を示唆した(論文[9])。

(9) 順序凸多面体に関する古典的な結果の一つに、そのトーリック環が ASL (algebra with straightening laws) の構造を持つ、という定理がある。類似の結果として、鎖多面体のトーリック環が ASL の構造を持つことを示し、その帰結として、鎖多面体が、単模かつ旗型な三角形分割を持つことを証明した(論文[10])。

(10) 研究代表者と大杉英史らは、順序凸多面体の centrally symmetric 配置(論文[6])のトーリックイデアルが、逆辞書式順序に関する二次のグレブナー基底を持つことを示し、その配置の凸閉包であるファノ凸多面体が反射的凸多面体であることを証明した(論文[11])。その結果を一般化し、有限グラフから反射的凸多面体の豊富な類を構成している(arXiv:1507.03221 など)。

順序凸多面体は、組合せ論、可換代数、代数幾何、表現論など、さまざまな分野に現れる、もっとも著名な凸多面体の類である。順序凸多面体は、A 超幾何系の理論を媒介とし、統計分布論とも関連する。その類似の理論を順序凸多面体に付随するファノ凸多面体で考察する研究は、今後の課題である。

(11) 研究代表者と青木敏、大杉英史は、トーリックイデアルの実験計画法への応用の一つとして、3水準の Box--Behnken 計画に基づく頻度データに対し、D型のルート系に付随する配置の centrally symmetric 配置が、自然な統計モデルに対応することを示した(arXiv:1502.02323)。更に、その配置のトーリックイデアルの、或る単項式順序に関するグレブナー基底の具体的な表示を導くことに成功している。そのグレブナー基底は二次二項式に加え、一般には、3次二項式を必要とするが、更なる考察から、これらの二項式の内、二次二項式だけでもトーリックイデアルを生成することが確認された。その結果、 p 値の推定に必須なマルコフ基底を簡明な形で構成することが可能となった。本研究成果は、多水準の計画に付随するトーリックイデアルに関する結果としては、最初のものと思われ、きわめて独創的である。

ルート系に付随する配置は、Gelfand らと、研究代表者らによる先駆的な研究があり、その centrally symmetric 配置については、凸閉包の三角形分割に関する研究が遂行されているなど、可換代数、凸多面体、計算幾何などの分野でも重要な研究対象であり、実験計画法との結び付きはきわめて興味深い。

(12) 研究代表者と大杉英史は、有限半順序集合の重複鎖に付随する次数 d の単項式が生成するトーリック環のトーリックイデア

ルを議論し、そのトーリックイデアルが二次生成であること、そのトーリックイデアルが二次のグレブナー基底を持つこと、および、その半順序集合の比較可能グラフが弦グラフであること、の3個の条件が同値であることを示した (arXiv:1602.00285)。その二次のグレブナー基底は、しかし、squarefreeではなく、そのトーリック環も、一般には、正規環とはならない。目下、そのトーリックイデアルの生成系をマルコフ基底とする統計モデルを創成する研究が遂行されている。

(13)目下、研究代表者と青木敏は、two way subtable sum problems [Hara, Takemura and Yoshida (2009); Ohsugi and Hibi (2009)]のマルコフ基底を一般化し、周辺が階段状の平面分配束の two way subtable sum problemsを議論し、その二次マルコフ基底の存在を示した。その応用とし、2次元変化点モデルの当てはまりの評価のための、マルコフ連鎖モンテカルロ法による条件付検定の有意確率計算の手法を考察している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

[1] T. Hibi, N. Li and Y. Zhang, Separating hyperplanes of edge polytopes, J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), 218--231.

[2] S. Aoki, T. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the regular two-level fractional factorial designs and cut ideals, J. Statist. Plann. Inference 143 (2013), 1791--1806.

[3] T. Hibi, K. Nishiyama, H. Ohsugi and A. Shikama, Many toric ideals generated by quadratic binomials possess no quadratic Gröbner bases, J. Algebra 408 (2014), 138--146.

[4] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and A. A. Qureshi, The binomial edge ideal of a pair of graphs, Nagoya Math. J. 213 (2014), 105--125.

[5] D. A. Cox, C. Haase, T. Hibi and A. Higashitani, Integer decomposition property of dilated polytopes, Electron. J. Combin. 21 (2014), Paper 4.28, 17 pp.

[6] H. Ohsugi and T. Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, Nagoya Math. J. 216 (2014), 153--170.

[7] T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, Algebraic study on Cameron--Walker graphs, J. Algebra 422 (2015), 257--269.

[8] V. Ene, J. Herzog and T. Hibi, Linearly related polyominoes, J. Alg. Combin. 41 (2015), 949--968.

[9] T. Hibi, N. Li and H. Ohsugi, The face vector of a half-open hypersimplex, J. Integer Seq. 18 (2015), Article 15.6.6, 12 pp.

[10] T. Hibi and N. Li, Chain polytopes and algebras with straightening laws, Acta Math. Vietnam 40 (2015), 447--452.

[11] T. Hibi, K. Matsuda, H. Ohsugi and K. Shibata, Centrally symmetric configurations of order polytopes, J. Algebra 443 (2015), 469--478.

[学会発表](計 3 件)

[1] T. Hibi, Cameron--Walker graphs (招待講演), International Conference on Commutative Algebra and Its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, Hanoi, Vietnam, 2013.12.16.

[2] T. Hibi, Stanley's influence on monomial ideals (招待講演), A Conference in Honor of Richard P. Stanley's 70th Birthday, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2014.06.15.

[3] T. Hibi, Gorenstein Fano polytopes and quadratic Gröbner bases (招待講演), Combinatorics and Experimental Methods in Commutative Algebra, Osnabrück, Germany, 2015.10.08.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.ist.osaka-u.ac.jp/japanese/introduction/professors/pure-and-applied-mathematics/combinatorics/takayuki-hibi.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

日比 孝之 (HIBI, Takayuki)

大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：80181113

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：