2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：若手研究(A)
研究期間：2013～2017
課題番号：２５７０７００２

研究課題名（和文）代数群の表現と付随するゼータ関数の整数論的研究

研究課題名（英文）Number theory for representations of algebraic groups and associated zeta functions

研究代表者
谷口　隆（Taniguchi, Takashi）

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：６０４２２３９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　7,200,000円

研究成果の概要（和文）：概均質ベクトル空間のゼータ関数を中心として、代数群の表現にはどのようなゼータ関数が伴っているか、それにはどのような整数論的応用があるかを研究した。中心的な成果は密度定理への応用で、３次体の判別式の個数を数える関数については、かなりよい漸近公式を証明できた。また、ゼータ関数の関数等式に現れる指数和について、単純で効果的な計算方法を見いだすことができ、新しい明示公式を多数得た。

研究成果の概要（英文）：Focusing mainly on zeta functions of prehomogeneous vector spaces, we investigate what kind of zeta functions may be associated with representations of algebraic groups, and their arithmetic significance when they exist. Our primary achievement is an application of density theorems. For counting functions of discriminants of cubic fields, we obtained a strong quantitative result. We also studied exponential sums appearing in the functional equation of the zeta function. We developed a simple and effective method to compute them, and give a variety of new explicit formulas.

研究分野：整数論

キーワード：ゼータ関数　代数群　概均質ベクトル空間　密度定理　指数和

１．研究開始当初の背景

2010 年の初め，世界中の整数論研究者に鮮烈な印象を与えた『有理数体上の楕円曲線を高さの順序で並べたとき，階数の平均は 1.5 以下である』という定理が Bhargava-Shankar によって発表された．この定理の証明には 2 元 4 次形式の空間が用いられる．これは余正則空間と呼ばれる代数群の表現の基本的な例である．この定理が発表されるまで，階数の平均は有限であるかどうかも分かっておらず，取り組むには困難に過ぎると考える研究者も多かった．これが余正則空間の整数論によって劇的に解決され，同時に広大な研究領域に繋がる道が切り拓かれた．（後に Bhargava はこれを含む一連の業績によって Fields 賞を受賞する．）

一方，余正則空間の基本的なケースに概均質ベクトル空間がある．その著しい特徴は，空間ごとに関数等式をみたすゼータ関数が定まることである．新谷卓郎による 2 元 3 次形式の空間の研究で関数等式をみたす新種のゼータ関数が構成され，ゼータ関数論に新たな方法論が提示された．Bhargava の高次合成則(2004-2008)によって整数軌道の深遠な意味も明らかになった．

整数論的な応用として，概均質ベクトル空間からは，代数体の判別式の個数についての密度定理が多く得られるようになっていた．2010 年までに, Bhargava によって 4 次体と 5 次体の場合の第一主要項が決定された．3 次体の場合は Bhargava-Shankar-Tsimerman と谷口（研究代表者）-Thorne の独立な研究によって，第二主要項も決定された．研究代表者が Thorne 氏と用いた方法は，概均質ベクトル空間についてゼータ関数を用いるものであり，同時に様々な一般化を得た．特に等差数列中の分布を考えると，剰余類によって偏りが出ることを見出した．整数論でこのような偏りが証明されることは珍しく，この結果は意外性をもって受け入れられた．

このような流れを受け，これまで別個に少しずつ研究されてきた不変式論・Lie 群論・多変数 Dirichlet 級数論との関係も組織的・総合的に調べられるようになり，研究は活況を呈するようになっていた．そして，これら代数群の表現にどのようなゼータ関数を考えうるか，その整数論的な意義は何かを探求することが問題として浮上していた．

２．研究の目的

国内外の若手研究者と連携しながら，概均質ベクトル空間のゼータ関数の研究をさらに推進して他の研究領域との連関を見出す．また，余正則空間やより一般的な表現についてもゼータ関数について研究し，整数論に新たな知見を与えることを目的とする．例えば以下のようなことを具体的な目標とする．

1. 整数論的に重要な概均質ベクトル空間のゼータ関数について研究する．軌道Ｌ関数の留数や軌道ガウス和を計算し，密度定理への応用を得る．
2. 概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数と，Weyl 群に付随する多重ディリクレ級数との関係を明らかにし，双方の理論の長所を組み合わせて新たな数論的応用を得る．
3. 余正則空間にどのようなゼータ関数が考えられるかを，ゼータ積分や``数の幾何"との関係から追求する．軌道ガウス和を計算し，また不変式論との連関を明らかにする．

３．研究の方法

概均質ベクトル空間のゼータ関数について，多面的に検討する．概均質ベクトル空間の不変量としての軌道指数和を考察する．密度定理を中心とする，代数的整数論への応用が多数見込まれるため，どのようなことが可能であるかを調査する．

これらの課題を研究する際は，個々の分野に属する個々の問題として扱うだけでなく，幅広い研究領域との繋がりを意識する．

毎年，国内外から研究者を招聘し，研究打ち合わせを行う．研究集会に出席して関連分野の情報を収集し，また研究成果を発表する．

情報収集のために，関連する分野の図書を購入する．研究補助者を雇用し，数値実験を行う．数値実験や論文執筆のため，必要な電子機器を購入する．

４．研究成果

(1) 3 次体の判別式を数える関数の誤差項の評価を改良した．研究を進める中で，成果を良くする新しい方法を何度か発見したため，長期間にわたる研究となったが，最終的にすべての場合で，誤差項の評価を X^(2/3+ε)にすることができた．ここにεは任意の正数である．またすべての判別式を数える場合は X^ε の部分を log(X) の冪に改良する，少し異なる証明を与えることもできた．
この証明でもっとも基本的なものは，Landau の定理の一様版である．この一様版を一般的な形で証明した．この一様版の応用として，超楕円体が含む格子点の個数や，代数体の整イデアルの個数につ

いて，誤差評価が一様となる数え上げもできた．これは David Lowry-Duda 氏と Frank Thorne 氏との共同研究であり，成果を論文にまとめて，現在投稿中である．
この一様版をさらに平均化したものを適用して，上述の $X^{(2/3+\varepsilon)}$ を証明した．またこの問題については，有限個の局所条件をつけたときの，その条件についての一様な評価を与えることが，応用上重要であることが明らかになっていた．これを量的に強い形で証明することもできた．これは Manjul Bhargava 氏と Frank Thorne 氏との共同研究であり，現在成果を論文にまとめているところである．

(2) 上記の共同研究を含め，本研究課題と関連する話題について， Manjul Bhargava 氏，Arul Shankar 氏，Frank Thorne 氏，Jacob Tsimerman 氏，Yongqiang Zhao 氏と数回の研究打ち合わせを行ったが，この中で半ば偶発的に，代数体のイデアル類群について意義深い成果を得ることができた．拡大次数ｎを任意に固定したとき，ｎ次代数体のイデアル類群の 2 等分点の個数について，上からの評価を得た．このような評価は多くの応用があることが知られていて，整数論では重視されている．実際今回の結果から，以下の量について，先行研究を改良する上からの評価を与えることができた．

- 有理数体上の楕円曲線についての，２セルマー群の位数，階数，及び整数点の個数
- 有理数体上の超楕円曲線の Jacobi 多様体についての２セルマー群と階数
- ガロア群が４次交代群となる４次代数体の個数

証明は比較的初等的なもので，数の幾何を用いる．位数２のイデアル類の代表元の中には，その平方の生成元にはノルムが小さくかつアルキメデス埋め込みの長さが概ね均一であるようなものが存在することを示す．このことと，代数体の整数環のなす格子の形があまり skew でないことから，証明される．これは上記５人との共同研究であり，この成果は論文にまとめて，現在投稿中である．

(3) 密度定理を得る上で往々にして問題になるのが，概均質ベクトル空間に伴う指数和の大きさを評価することである．これらについて多面的に検討しているうちに，軌道指数和（軌道の指示関数のフーリエ変換の値）を明示的に求める簡単な手法を発見した．その方法に基づいて，比較的単純な１０種類程度の概均質ベクトル空間について，軌道指数和の明示公式を得た．この中には，３変数２次形式の対のなす 12 次元の概均質ベクトル空間も含まれている．この方法が可能である原理は，部分空間を用いて有理軌道が「階層化」できることになる．計算の過程では，概均質ベクトル空間に特徴的な構造が鮮やかに現れる．超局所解析などの代数解析と関係する可能性もあり，今後さらなる研究を続けたいと考えている．Frank Thorne 氏との共同研究であり，この成果は論文にまとめて，現在投稿中である．

(4) 指数和の計算の直接の応用として，概素数判別式をもつ３次体や４次体の個数の下からの評価が得られた．これは概素数で篩う必要があるが，特に Bhargava の幾何篩を効果的に用いることができる．必要な形に定式化しなおしたものを証明して適用した． Richert と Greaves の重み篩を用いて，よい成果を得た．３次体の場合は，高々３個の素因数をもつ判別式が，また４次体の場合は，高々８個の素因数をもつ判別式が，「十分に多く」存在することを証明した．Frank Thorne 氏との共同研究であり，この成果は論文にまとめて，現在投稿中である．

(5) この他，まだ決定的な形にはまとまっていないが，概均質ベクトル空間でない余正則空間について軌道指数和を考察し，一定の進展を見た．現在も研究を継続している．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① 谷口隆，Manjul Bhargava 氏の業績 -楕円曲線の平均階数と数の幾何-，数学，68, 2016, pp. 72-82. (査読有)

② Yasuo Ohno and Takashi Taniguchi, Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II, Mathematical Research Letters, 21, 2014, pp. 363-378. (査読有) DOI: http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2014.v21.n2.a12

③ 谷口隆，3 次体の数え上げ，数理解析研究所講究録，1898, 2014, pp.124-139. (査読無)

④ Takashi Taniguchi and Frank Thorne,

An error estimate for counting S_3-sextic number fields, International Journal of Number Theory, 10, 2014, pp. 935-948. (査読有) DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S17930424500080

⑤ Takashi Taniguchi and Frank Thorne, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms, Canadian Journal of Mathematics, 65 2013, pp. 1320-1383. (査読有) DOI: http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2013-027-0

⑥ Takashi Taniguchi and Frank Thorne, Secondary terms in counting functions for cubic fields, Duke Mathematical Journal, 162, 2013, pp. 2451-2508. (査読有)

〔学会発表〕（計２３件）

① 谷口隆, Uniformity in Landau's method and applications, Arithmetic Geometry and Related Topics, 愛媛大学, 2017年11月20日.

② 谷口隆, Variants of Ohno-Nakagawa's dual identity, 神戸整数論集会 2017, 神戸大学, 2017年6月9日.

③ 谷口隆, 概均質ベクトル空間の軌道指数和, 代数的整数論とその周辺 2016, 京都大学数理解析研究所, 2016年11月28日.

④ 谷口隆, Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces, Whittaker Functions: Number Theory, Geometry and Physics, Banff International Research Station (カナダ), 2016年7月25日.

⑤ 谷口隆, Exponential sums associated to prehomogeneous vector spaces, 2016 Seoul-Tokyo conference on Number Theory, KIAS （韓国）, 2016年6月17日.

⑥ 谷口隆, Average rank of elliptic curves-- the work of Manjul Bhargava --,Arithmetic and Algebraic Geometry 2016, 東京大学,（東京都） 2016年1月25日.

⑦ 谷口隆,楕円曲線の平均階数 - Manjul Bhargava のフィールズ賞受賞と今後の展望 -,日本数学会 2015年度年会企画特別講演, 明治大学.（東京都）2015年3月24日.

⑧ 谷口隆, Second order terms in some arithmetic functions, Prehomogeneous Vector Spaces and Related Topics (2014), 立教大学.（東京都） 2014年9月5日.

⑨ 谷口隆, The zeta functions attached to prehomogeneous vector spaces, SMS2014 - Counting Arithmetic Objects, モントリオール大学.（カナダ）2014年6月26日.

⑩ 谷口隆, Cubic field discriminants in arithmetic progressions, 解析的整数論, 京都大学数理解析研究所,（京都府）2013年11月7日

⑪ 谷口隆, Applications of Sato-Shintani's zeta functions for the space of binary cubic forms, Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces,名古屋大学,（愛知県）2013年8月27日.

⑫ 谷口隆, Orbital L-functions for the space of binary cubic forms and their applicationas, Combinatorics, Multiple Dirichlet series and Analytic Number Theory , ICERM, プロビデンス(米国). 2013年4月16日.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/index_j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
谷口　隆（TANIGUCHI, Takashi）
神戸大学大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：60422391