

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年5月8日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2013～2017

課題番号：25707004

研究課題名(和文)非線形分散型方程式に対する分散波、孤立波およびそれらの相互作用の解析

研究課題名(英文) Analysis of dispersive wave, solitary wave and their interactions for nonlinear dispersive equations

研究代表者

瀬片 純市 (Segata, Jun-ichi)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90432822

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、水面波モデル等に現れる一般化KdV方程式や渦糸運動を記述する非線形分散型方程式を中心に、分散波や孤立波が解の長時間挙動にどのような影響を及ぼすのか?という観点から解の長時間挙動を調べた。一般化KdV方程式に対しては質量劣臨界と呼ばれる場合に、解を分類する上で重要な役割を果たす最小非散乱解を構成した。また渦糸運動のモデルに対するソリトンの安定性、デルタポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式や非線形クラインゴルドン方程式に対する長距離散乱問題を解決することが出来た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we study the long time behavior of solutions to the nonlinear dispersive equations such as the generalized KdV equation and the vortex filament equation from the point of view of how dispersive wave and solitary wave would affect the long time behavior of solution. We construct a minimal non-scattering solution, which plays an important role in the classification of solutions for the mass sub-critical KdV equation. We also prove the stability of soliton for the vortex filament equation, and the long range scattering for the nonlinear Schrodinger equation with delta potential and the nonlinear Klein-Gordon equation.

研究分野：非線形分散型方程式

キーワード：関数方程式論 数理物理学 漸近解析 調和解析学 流体

## 1. 研究開始当初の背景

非線形分散型方程式は線形項から来る分散性と非線形項から来る特異性とのバランスにより、解はさまざまな様相を呈する。そのため、非線形分散型方程式の解の長時間挙動を一般的に捉えるのは難しい。これまでは、初期データが孤立波の形状に近い場合や、小さな初期データに対し、非線形分散型方程式の解の長時間挙動の詳細な研究がされてきた。一般の初期データに対しては、解の挙動は複数の孤立波と分散波の重ね合わせになるという予想(ソリトン分解予想)があるものの、一般の初期データに対する解の挙動を調べる手法が確立されていないという状況である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、物理学や工学に現れる非線形分散型方程式に対し、解の長時間挙動、特に分散波や孤立波が解の長時間挙動にどのような影響を及ぼすのか?という問題を関数解析、変分法、調和解析などの手法を用いて解析することである。本研究では、水面波モデル等に現れる一般化 Korteweg-de Vries 方程式(一般化 KdV 方程式)や渦糸運動を記述する Da Rios モデルあるいは Fukumoto-Moffatt モデルといった非線形分散型方程式を中心に解の長時間挙動を調べる。

## 3. 研究の方法

一般化 KdV 方程式に対しては、解の漸近形がどのようなものか?ということについて長距離型散乱理論や変分法的議論、分散型方程式に対する時空間評価とそれに基づく凝集コンパクト性の議論等を用いて解析を行った。Da Rios モデルや Fukumoto-Moffatt モデル等、渦糸運動を記述する方程式に対しては、変分法や修正エネルギー法などを用いてソリトンの安定性を解析した。さらには、一般化フーリエ変換や振動積分に対する停留位相法等を駆使して、ポテンシャルがある場合の非線形シュレディンガー方程式、量子 Zakharov 方程式系、非線形 Klein-Gordon 方程式といった非線形分散型・双曲型方程式の解の挙動の解析を行った。

## 4. 研究成果

(1) 一般化 KdV 方程式の時間大域解および散乱問題について研究を行った。一般に、偏微分方程式のスケールに関し不変となる関数空間においては小さな初期値に対する大域解の存在が期待される(加藤・藤田の原理)。質量劣臨界一般化 KdV 方程式に対し、スケール不変となるソボレフ空間は負の指数を持つため、小さな初期値に対する大域解の存在を示すこ

とは非常に難しい。本研究ではフーリエ変換が  $p'$  乗可積分となる関数空間( $p'$ は  $p$  のヘルダー共役指数)を考え、この関数空間上で小さな初期値に対する質量劣臨界一般化 KdV 方程式の大域解の存在および解の散乱を、眞崎聡氏(広島大学)とともに証明した(雑誌論文 [5])。また非線形項が時間振動項を持つ質量優臨界 KdV 方程式についても解の挙動を捉えることが出来た(雑誌論文 [6])。

(2) 一般化 KdV 方程式の解の長時間挙動について、特に、解の挙動を分類するという観点から研究を行った。この問題はソリトン分解予想とも関わっている。一般化 KdV 方程式は質量劣臨界、質量優臨界の場合でソリトンの安定性、不安定性など解の挙動が大きく変わる。本研究においては主に、ソリトン解が安定になる質量劣臨界の場合に一般化 KdV 方程式の解の挙動を、分散型方程式の時空間評価に基づく凝集コンパクト性の議論を用いて解析した。特に零解に近づく(散乱する)解がなす集合と近づかない(散乱しない)解のなす集合の境目にあたる元(最小非散乱解)の存在を示した(雑誌論文 [1])。また、最小化問題の設定を変えることでプレコンパクト性を持つ最小非散乱解の存在を示すことが出来た。

(3) Fukumoto-Moffatt モデルとよばれる 4 階非線形シュレディンガー型方程式の適切性およびソリトンの安定性について考察した。渦糸運動の高次近似モデルとして現れる 4 階非線形シュレディンガー型方程式は、通常非線形シュレディンガー方程式同様、定在波解と呼ばれる特殊解を持つ。同方程式は空間非周期的な定在波及び空間周期的な定在波を持ち、これらの定在波解の安定性を調べることは数学的にも物理学的にも興味深い。本研究では空間周期的な場合に初期値問題の適切性および定在波解の軌道安定性を、通常エネルギー法を改良した修正エネルギー法や変分法を用いて証明した(雑誌論文 [8])。また、解の適切性を証明する際に用いた修正エネルギー法を応用することにより、KdV 階層に現れる 5 階の KdV 型方程式の解の滑らかさの伝播に関して成果を得ることが出来た(雑誌論文 [3])。Fukumoto-Moffatt モデルに対する適切性およびソリトンの安定性の研究に関して、平成 28 年度日本数学会函数方程式論分科会第 8 回福原賞を受賞した。

(4) 空間 1 次元の場合に排斥的デルタポテンシャルと 3 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の散乱問題について考察した。同方程式は、局在化した欠陥を持つ光導波路を通る光の伝播を記述するモデルとして提

唱された. 本研究では, 予め与えられた漸近形に対して, 時刻無限大でその漸近形に収束するようなデルタポテンシャルつき非線形シュレディンガー方程式の解を構成した. 線形分散型方程式の散乱理論の類推から, デルタポテンシャルつき非線形シュレディンガー方程式の解は線形化方程式の解に漸近しないと予想される. そこで本研究では小澤徹氏により確立された非線形シュレディンガー方程式に対する長距離散乱理論を応用することによりこの問題にアプローチした. 小澤氏の手法においてフーリエ変換のさまざまな性質が重要な役割を果たすが, ポテンシャルがある場合はフーリエ変換を有効に用いることは困難である. そこで本研究ではフーリエ変換の代わりにデルタポテンシャルに付随した一般化フーリエ変換を導入することにより終値問題を解決することが出来た(雑誌論文 [9]).

(5) 量子 Zakharov 方程式系に対し, イオン音速を無限大にしたときの極限について考察した. 通常の Zakharov 方程式系は Langmuir 波とイオン音波の相互作用を記述するモデルとしてよく知られているが, 量子 Zakharov 方程式系は通常の Zakharov 方程式系に量子効果を考慮したモデルとして, Garcia-Haas-Oliveira-Goedert により提唱された. 量子効果により量子 Zakharov 方程式系は 4 階シュレディンガー型方程式と 4 階の波動方程式の連立系として記述される. 本研究では, イオン音速を無限大としたとき, 量子 Zakharov 方程式の解が, ある 4 階の非線形シュレディンガー方程式の解に収束することを重み付きエネルギー法及び多次元振動積分に対する停留位相法を用いることで証明した(Yung-fu Fang 氏(National Cheng Kung University), Chi-Kun Lin 氏(National Chiao Tung University)との共同研究, 雑誌論文 [7]).

(6) ゲージ不変な 2 次の非線形項を持つ 2 次元 Klein-Gordon 方程式の散乱問題について考察した. 同方程式は非線形項が滑らかではないため, 具体的な解の挙動は長年未解決であった. 本研究では一般化 KdV 方程式の解の挙動を調べる際に用いた, フーリエ級数に関する手法を用いることで, ゲージ不変な 2 次の非線形項を持つ 2 次元 Klein-Gordon 方程式に対し解の挙動を捉えることが出来た. 具体的には, 線形化方程式の解に位相を補正を施したものを漸近形として与えたとき, 時刻無限大でその関数に漸近するような非線形 Klein-Gordon 方程式の解を構成した(雑誌論文 [4]). またわれわれの手法と Ginibre-Ozawa による手法を組み合わせることで 3 次元非線形 Klein-Gordon 方程式に対しても

同様の結果を得ることが出来た(眞崎聡氏(大阪大学)との共同研究, 雑誌論文 [2]).

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

[1] Satoshi Masaki and Jun-ichi Segata, Existence of a minimal non-scattering solution to the mass sub-critical generalized Korteweg-de Vries equation, *Annales de l'Institut Henri Poincaré /Analyse non linéaire*, **35**, no.2 (2018), 283-326 査読有, doi: 10.1016/j.anihpc.2017.04.003

[2] Satoshi Masaki and Jun-ichi Segata, Modified scattering for the Klein-Gordon equation with the critical nonlinearity, The special issue of *Communications on Pure and Applied Analysis*, **17** no.4 (2018), 1595-1611 査読有, doi:10.3934/cpaa.2018076

[3] Jun-ichi Segata and Derek L. Smith, Propagation of regularity and persistence of decay for fifth order dispersive models, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **29**, no.2 (2017), 701-736, 査読有, doi: 10.1007/s10884-015-9499-x

[4] Satoshi Masaki and Jun-ichi Segata, Modified scattering for the quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in two dimensions, *Transactions of the American Mathematical Society* に掲載決定 (2017), 査読有.

[5] Satoshi Masaki and Jun-ichi Segata, On well-posedness of generalized Korteweg-de Vries equation in scale critical  $L^r$  space, *Analysis & PDE* **9**, no.3 (2016), 699-725, 査読有, doi: 10.2140/apde.2016.9.699

[6] Jun-ichi Segata and Keishu Watanabe, The generalized Korteweg-de Vries equation with time oscillating nonlinearity in scale critical Sobolev space, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* **23** no.5 (2016), article number 51, 査読有, doi: 10.1007/s00030-016-0405-y

[7] Yung-Fu Fang, Chi-Kun Lin, and Jun-ichi Segata, The fourth order nonlinear Schrödinger limit for quantum Zakharov system, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP - Journal of Applied Mathematics and Physics*, **67**, no.6 (2016), article number 145, 査読有, doi: 10.1007/s00033-016-0740-1

[8] Jun-ichi Segata, Initial value problem for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation on torus and orbital stability of standing waves, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **14**, no.3 (2015), 843-859, 査読有, doi:10.3934/cpaa.2015.14.843

[9] Jun-ichi Segata, Final state problem for the cubic nonlinear Schrödinger equation with repulsive delta potential, *Communications in Partial Differential Equations*, **40**, no.2 (2015), 309-328, 査読有, doi: 10.1080/03605302.2014.930753

〔学会発表〕 (計 22 件)

[1] Jun-ichi Segata, Modified scattering for the Klein-Gordon equation with the critical nonlinearity in two and three dimensions, RIMS 研究集会 Nonlinear Wave and Dispersive Equations 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市) 2017 年 8/30-9/1.

[2] Jun-ichi Segata, Scattering problem for the generalized Korteweg-de Vries equation, PDE/Applied seminar at UCSB, University of California (Santa Barbara, USA) 2017 年 3/10.

[3] Jun-ichi Segata, Refinement of Strichartz estimate for Airy equation in non-diagonal case and its application, *Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation 2017*, 東京理科大学 (東京都) 2017 年 2/20-2/21.

[4] Jun-ichi Segata, Scattering problem for the generalized Korteweg-de Vries equation, 第 34 回九州における偏微分方程式研究集会, 九州大学 (福岡県, 福岡市) 2017 年 1/30-2/1.

[5] 瀬片 純市, 一般化 Korteweg-de Vries 方程式の散乱問題, 東北大学数学教室談話会, 東北大学 (宮城県, 仙台市) 2017 年 1/23.

[6] Jun-ichi Segata, Scattering problem for the generalized Korteweg-de Vries equation, 2016 Taiwan-Japan Workshop on Dispersion, Navier Stokes, Kinetic, and Inverse Problems 2016, National Cheng Kung University (台南市, 台湾) 2016 年 12/25-12/27.

[7] 瀬片 純市, Final state problem for the Klein-Gordon equation with quadratic gauge invariant nonlinearity in two dimensions, 京都大学 NLPDE セミナー, 京都大学 (京都府, 京都市) 2016 年 12/16.

[8] Jun-ichi Segata, Scattering problem for the generalized Korteweg-de Vries equation, Colloquium at Fudan University, Fudan University (上海市, 中国) 2016 年 12/9.

[9] 瀬片 純市, Modified scattering for the Klein-Gordon equation with quadratic gauge invariant nonlinearity in two dimensions, 第 3 回 神楽坂非線形波動研究会, 東京理科大学 (東京都) 2016 年 12/2-12/3.

[10] Jun-ichi Segata, Refinement of Strichartz estimates for Airy equation and application, *Nonlinear Wave and Dispersive Equations*, Kyoto 2016, 京都大学理学部 (京都府, 京都市) 2016 年 9/6-9/8.

[11] Jun-ichi Segata, Refinement of Strichartz estimates for Airy equation and application, *Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics*, 早稲田大学 (東京都) 2016 年 7/20-7/22.

[12] Jun-ichi Segata, Refinement of Strichartz estimates for Airy equation and application, RIMS 研究集会 保存則と保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および長時間挙動の研究, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市) 2016 年 6/6-6/8.

[13] 瀬片 純市, Scattering problem for generalized KdV equation with oscillating initial data, 第 5 回 弘前非線形方程式研究会, 弘前大学 (青森県, 弘前市) 2015 年 12/12.

[14] Jun-ichi Segata, The fourth order nonlinear Schrödinger limit for quantum Zakharov system, *Critical Problems in Nonlinear Evolution Equations*, 東京理科大学 (東京都) 2015 年 11/7.

[15] Jun-ichi Segata, Scattering problem for generalized KdV equation in  $L^p$  space, The 13th Linear and Nonlinear Waves, 滋賀県立県民交流センターピアザ淡海 (滋賀県, 大津市) 2015 年 11/3-11/5.

[16] 瀬片 純市, 一般化 Korteweg-de Vries 方程式の小さな初期値に対する大域解の存在と散乱, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学 (京都府, 京都市) 2015 年 9/13-9/16.

[17] 瀬片 純市, Well-posedness for generalized KdV equation in scale critical  $L^p$  space, 金沢解析研究会 2015, 金沢大学 サテライト・プラザ (石川県, 金沢市) 2015 年 8/27-8/28.

[18] Jun-ichi Segata, Well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation and orbital stability of standing waves, Math Colloquium at National Cheng Kung University, National Cheng Kung University (台南市, 台湾) 2015 年 6/11.

[19] 瀬片 純市, Small data global existence and scattering for the generalized Korteweg-de Vries equation, 第 116 回熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学 (熊本県, 熊本市) 2015 年 6/6.

[20] 瀬片 純市, イオン音速を無限大にしたときの量子 Zakharov 方程式系の極限について, 東北大学 応用数学セミナー, 東北大学 (宮城県, 仙台市) 2015 年 4/16.

[21] 瀬片 純市, Final state problem for the cubic nonlinear Schrödinger equation with repulsive delta potential, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学 (愛知県, 名古屋市) 2014 年 12/15.

[22] Jun-ichi Segata, The higher order nonlinear dispersive equation related to the motion of vortex filament, PDE/Applied seminar at UCSB, University of California (Santa Barbara, USA) 2014 年 4/25.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

瀬片 純市 (Segata Jun-ichi)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 90432822

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし