

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 22 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2013～2017

課題番号：25707005

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式における自己相似構造の数学解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis of self-similar structure for nonlinear partial differential equations

研究代表者

三浦 英之(Miura, Hideyuki)

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：20431497

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,200,000円

研究成果の概要(和文)：調和写像熱流方程式や非圧縮性流体を記述する偏微分方程式等の研究を行った。調和写像熱流方程式においてはエネルギー超臨界次元において $n$ 次元ユークリッド空間から $n$ 次元球面に値をとる同変写像について研究し、特定の初期データに対しては、共に安定となる異なる二つの前方自己相似解が存在しうることを示した。また解の一意性が成立するための値域の最良条件を特定した。非圧縮性流体の研究においては、非有界領域における Helmholtz 分解定理や非圧縮性条件を満たすベクトル場の構造定理など様々な結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：The harmonic map heat flow equation and partial differential equations describing the incompressible fluids are studied. Concerning the harmonic map heat flow, we focused on equivariant maps from the  $n$ -dimensional Euclidean space to the  $n$ -dimensional sphere in energy supercritical dimensions and showed that certain data can give rise to two distinct solutions which are both stable. We also identified the optimal condition for the range of the solution to guarantee the uniqueness. In the research of the incompressible fluids, various results such as the Helmholtz decomposition and the structure theorem for the incompressible vector fields in unbounded domains are obtained.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：自己相似解 調和写像熱流 非圧縮性流体

### 1. 研究開始当初の背景

調和写像熱流方程式および非圧縮性 Navier-Stokes 方程式, Euler 方程式は, 微分幾何学, 流体力学に現れる基礎的な非線形偏微分方程式であり, 多くの研究が行われている. これらの方程式に付随する自然なスケール変換に関して不変な解である自己相似解は, 一般の解の大域挙動を調べる上で重要な役割を果たすことが知られている. 調和写像熱流方程式においては, Biernat 氏らの数値計算によりエネルギー超臨界次元 ( $n = 3$ ) における自己相似解の安定性に関する予想が与えられているが, 数学的検証は解がある意味で十分小さい場合のみ行われていた. また Navier-Stokes 方程式においてはスケール不変な関数空間における研究の重要性が指摘されている. しかしながら方程式の非局所性よりコンパクトでない境界をもつ領域における解析は特に困難であるため, 多くの課題が残っている状況であった.

### 2. 研究の目的

調和写像熱流方程式に対しては, 特に  $n$  次元ユークリッド空間から  $n$  次元球面に値をとる同変写像について, エネルギー超臨界次元 ( $n = 3$ ) における自己相似解の安定性解析を行う. 非圧縮性流体に現れる方程式の研究については, 特に非圧縮性条件をみたすベクトル場全体の構造を研究し, 半空間において知られている Stokes 方程式に対する解公式をより一般の領域に拡張する. また速度場の無限遠での挙動の影響を解析するために初期速度場が一樣局所的な可積分性のみをもつ場合の Navier-Stokes 方程式の可解性を研究する. また Euler 方程式に対しては, 領域の形状が渦度場の時間大域挙動に与える効果を研究する.

### 3. 研究の方法

調和写像熱流方程式においては, 正則性理論や比較原理に加えて調和解析の手法を用いて自己相似解の安定性の研究を行う. また同変写像の満たす方程式が半線形熱方程式と類似の構造をもつことに着目し, 同方程式の前方自己相似解の構造に関する内藤氏らの研究および安定性に関する柳田氏らの研究を参考にする. 非有界領域における Stokes 方程式の解公式のために, 半空間における研究で鵜飼氏によって導入された非圧縮性ベクトル場全体のなす空間への射影作用素について考察し, 楕円型作用素に対する Dirichlet-Neumann 写像との関係を調べる. 一樣局所的な可積分性をもつ速度場に対する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の研究については, 無限遠で減衰しない初期速度場に対する可解性の研究の再検討を行う. また Euler 方程式の渦度場の研究においては, 領域の形状の影響を調べるためにポテンシャル論の手法を用いて Green 関数を解析する.

### 4. 研究成果

(1) 調和写像熱流方程式における同変な前方自己相似解の安定性について,  $0$  次斉次な初期データに対しては, 安定な前方自己相似解が少なくとも一つ存在することが証明された. また空間次元が  $3$  次元以上  $6$  次元以下の場合, 特定の初期データに対しては, 共に安定となる前方自己相似解が二つ以上存在することが示された. さらにその安定性解析の応用として, 一般の初期データに対し, 値域が上半球面または下半球面に限定される解は一意的であることが示された. 同変写像が極および赤道と交わる場合, 前方自己相似解の一意性が崩れることが知られているので, これは同変写像の一意性に関して最良の条件を与えていることがわかる; Germain-Ghoul-Miura (2017, CPAM).

(2) 発散型楕円型作用素に対し, それに付随する Poisson 作用素と Dirichlet-Neumann 写像による factorization 公式を導き, 応用として境界が一樣 Lipschitz 関数のグラフで表される領域において, ある非等方的関数空間における Helmholtz 分解定理を証明した; Maekawa-Miura (2014, Math. Ann.). これは従来の研究と比較するとグラフの無限遠での仮定を大幅に弱めている. さらに同じクラスの領域および関数空間において, 半空間において鵜飼氏によって導入された射影の一般化とみなせる作用素を構成した; Maekawa-Miura (2018, SIMA). この作用素を用いることにより, コンパクトでない境界をもつ領域における Navier-Stokes 方程式の解について新しい知見が得られることが期待できる.

(3)  $2$  次元非圧縮性 Euler 方程式は no flow 境界条件の下では大域解の渦度勾配の最大ノルムは時間について高々重指数増大しかしないことが知られていたが, 重指数増大するような解が実際に存在するかという問題が残されていた. 最近, Kiselev-Sverak により  $2$  次元円盤においては境界の近傍で重指数増大する解が存在することが示された. 我々はこれに関連し正方形内における Euler 流を考察し, ある種の対称性をもつ流れについては頂点の近傍で高々指数増大しかしないことを証明した. これは境界の形状によって解の挙動が異なる可能性があることを示している; Itoh-Miura-Yoneda (2016, JFM).

(4) 半空間における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題に関する研究を行い, 一樣局所的な可積分性をもつ初期速度場に対して時間局所的な可解性の結果を得た; Maekawa-Miura-Prange (preprint). 一樣局所型 Lebesgue ノルムは関数の局所的な正則性の情報を調べる際に有用であり, また空間無限遠で減衰しない解を考える上でも重要となる. 一樣局所型空間における Navier-Stokes 方程式の研究は全空間における初期値問題に関して Lemarie-Rieusset および前川-寺澤による先行研究があるが, 境

界をもつ領域においてはこれまでほとんど研究が行われてこなかった。本研究では半空間における問題を考察し, mild solution と呼ばれるクラスの解の時間局所的な一意存在を証明した。また主結果の応用として, 解の爆発時刻付近における局所 Lebesgue ノルムの集中現象を調べることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Yasunori Maekawa, Hideyuki Miura, On Isomorphism for the Space of Solenoidal Vector Fields and Its Application to the Incompressible Flows, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 査読有, 50, (2018), no. 1, 339-353.

Kyungkeun Kang, Hideyuki Miura, Tai-Peng, Tsai, Green tensor of the Stokes system and asymptotics of stationary Navier-Stokes flows in the half space, *Advances in Mathematics*, 査読有, 323, (2018), no. 7, 326-366.

Pierre Germain, Tej-eddine Ghouil, H. Miura, On uniqueness for the harmonic map heat flow in supercritical dimensions, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 査読有, 70, (2017), no. 12, 2247-2299.

Yasunori Maekawa, Hideyuki Miura, On domain of Poisson operators and factorization for divergence form elliptic operators. *Manuscripta Mathematica*, 査読有, 152, (2017), no. 3-4, 459-512.

Tsubasa Itoh, Hideyuki Miura, Tsuyoshi Yoneda, Remark on single exponential bound of the vorticity gradient for the two-dimensional Euler flow around a corner, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 査読有, 18, (2016), no. 3, 531-537.

Yasunori Maekawa, Hideyuki Miura, On

Poisson operators and Dirichlet-Neumann maps in  $H^s$  for divergence form elliptic operators with Lipschitz coefficients, *Transactions of the American Mathematical Society*, 査読有, 368, (2016), no. 9, 6227-6252.

Yasunori Maekawa, Hideyuki Miura, Remark on the Helmholtz decomposition in domains with noncompact boundary, *Mathematische Annalen*, 査読有, 359, (2014), no. 3-4, 1077-1095.

Yasunori Maekawa, Hideyuki Miura, On fundamental solutions for non-local parabolic equations with divergence free drift, *Advances in Mathematics* 247 (2013), 123-191.

[学会発表](計 9 件)

Hideyuki Miura, Local energy weak solutions for the Navier-Stokes equations in the half-space, 第10回名古屋微分方程式研究集会, 2018年3月16日

Hideyuki Miura, On uniqueness for the supercritical harmonic map heat flow, 第42回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 北海道大学, 2017年8月9日

③ Hideyuki Miura, On uniqueness for the harmonic map heat flow in supercritical dimensions, The 14th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2017年3月10日

Hideyuki Miura, On Ukai-type solution formula for the Stokes system in a domain with boundary, 4th. International Conference on Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics in 2015, ホテル日航奈良, 2015年9月25日

⑤ Hideyuki Miura, Growth of the vorticity gradient for the two dimensional Euler flows around a corner, ISAAC 2015, University of Macau, 2015年8月4日

Hideyuki Miura, On Ukai-type solution formula for the Stokes system in a

domain with boundary , Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues , Vilnius, Lithuania , 2015 年 6 月 5 日

- ⑦ Hideyuki Miura, On Ukai-type solution formula for the Stokes system in a domain with graph boundary, 2015 年 1 月 21 日

Hideyuki Miura, On isomorphism for the space of solenoidal vector fields and its application to the Stokes problem, 非圧縮性粘性流体の数理解析, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 11 月 18 日

- ⑨ Hideyuki Miura, Remark on the Helmholtz decomposition in domains with noncompact boundary , Fourth Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Sanya, China, 2013 年 12 月 22 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等 特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

三浦 英之 (MIURA HIDEYUKI)  
東京工業大学・情報理工学院・准教授  
研究者番号：20431497

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

( )