

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25730001

研究課題名(和文) 組合せの構造を有する最適化問題の効率的アルゴリズム設計

研究課題名(英文) Designing Efficient Algorithms for Optimization Problems with Combinatorial Structures

研究代表者

垣村 尚徳 (KAKIMURA, Naonori)

東京大学・大学院総合文化研究科・講師

研究者番号：30508180

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、離散・連続最適化問題が持つ組合せ的構造に着目し、その構造を有効に利用した効率的アルゴリズムの設計を行なった。離散最適化問題については、グラフ上の最適化問題から生じる詰め込み・被覆型の整数計画問題に対して、構造的グラフ理論の先進的手法を利用することでErdos-Posa性と呼ばれる組合せ的構造を明らかにし、効率的な固定パラメータ・アルゴリズムを設計した。連続最適化問題に関しては、線形相補性問題という一般的な数理計画問題に対して、整数性などの組合せ的性質の解析、および、疎性など内在する組合せ的性質を利用した効率的なアルゴリズムの設計を行なった。

研究成果の概要(英文)：In this project, we designed efficient algorithms for continuous and discrete optimization problems using their combinatorial structures. For discrete optimization problems, we analyzed combinatorial structures such as the Erdos-Posa property for packing/covering integer programming problems. The analysis is based on structural graph theory. The structures we found are used to develop efficient fixed-parameter algorithms. For continuous optimization problems, we mainly focused on the linear complementarity problems. We discussed the integrality of the linear complementarity problems. We also proposed efficient algorithms for LCP exploiting the sparsity.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：アルゴリズム グラフマイナー理論 固定パラメータ・アルゴリズム 線形相補性問題 疎性

1. 研究開始当初の背景

ある制約のもとで最も良い解を見つけるための方法論(最適化理論)は、数理学・情報科学だけではなく工学や経済学などさまざまな分野で必要とされており、企業の意思決定支援・経営資源最適化など産業に密接な問題にも利用されている。最適化問題を計算量の観点から見ると、線形計画や最短路問題などの効率的に(多項式時間で)計算できる問題と、非凸最適化やスケジューリング問題などの多項式時間で計算することが難しい問題(NP 困難問題)に大きく分類できる。効率的に計算できる問題は凸性やマトロイド構造など良い構造を持っており、それらがアルゴリズム設計に有用な指針を与えている。一方、NP 困難問題は一般に良い構造が解明されておらず、アルゴリズムは発見的に設計される場合が多い。

研究開始前の河原林健一教授(国立情報学研究所)らとの共同研究によって、サイクル詰め込みとフィードバック点集合という2つの NP 困難な組合せ最適化問題の一般化に対して、その背後にある Erdős-Pósa 性という構造を解明することで、効率的なアルゴリズム(固定パラメータ・アルゴリズム)を設計した。このように、Erdős-Pósa 性などの組合せ的性質が NP 困難問題のアルゴリズム設計に有効であることが分かってきた。

2. 研究の目的

本研究課題では、最適化問題が持つ組合せ的構造に着目し、その構造を有効に利用した効率的アルゴリズムの設計を行なう。離散最適化問題、連続最適化問題の両者を対象とし、構造的グラフ理論の先進的手法を利用することで効率的なアルゴリズムの設計に取り組む。

(1) 離散最適化問題の組合せ的構造の解析

離散最適化問題に対しては、Erdős-Pósa 性などの組合せ的構造を利用したアルゴリズム設計法をさらに発展させる。すなわち、より一般的な離散最適化問題に対して、Erdős-Pósa 性などの内在する組合せ的構造を明らかにし、その構造に基づく効率的な固定パラメータ・アルゴリズムを提案する。

(2) 連続最適化問題の組合せ的構造の解析

実社会に現れる連続最適化問題では、疎性などの組合せ的性質を持つものが多い。連続最適化問題が持つ組合せ的性質を利用することで、理論保証を持つ高速なアルゴリズムの設計に取り組む。

3. 研究の方法

「研究の目的」で挙げた(1) 離散最適化

(2) 連続最適化に対応して、主に以下の2つの問題に取り組む。

(1) 詰め込み・被覆型の組合せ最適化問題

グラフの詰め込み問題とは、グラフの中に何か対象となるものを互いに交わらないようにできる限り多く見つける問題である。詰

め込み問題はグラフ理論における基本的な問題として古くから研究されており、古典的な結果としてサイクル詰め込み問題に対する Erdős-Pósa 性がある。これは、詰め込みのサイクルの最大数とフィードバック点集合の最小サイズを関連づける組合せ的性質であり、効率的なアルゴリズムを設計するための指針となりうる。

研究開始前の申請者の研究では、河原林健一教授(国立情報学研究所)らとともに、指定された頂点を通るサイクルのみを詰め込む問題に対して、Erdős-Pósa 性を示した。これはサイクル詰め込み問題の一般化となっている。この問題をさらに一般化し、詰め込み・被覆型の整数計画問題として記述できる組合せ最適化問題に対して、Erdős-Pósa 性を持つための構造的特徴付けを与える。そのためにグラフマイナー理論を始めとする構造的グラフ理論を利用する。そして Erdős-Pósa 性をもとに、詰め込み・被覆型の整数計画に対する固定パラメータ・アルゴリズムを設計する。

(2) 線形相補性問題の組合せ的構造

連続最適化問題のひとつである線形相補性問題に主に焦点を当て、その組合せ的構造の解析と組合せ的構造を利用した効率的なアルゴリズムの設計に取り組む。線形相補性問題(LCP)は、線形計画や凸二次計画を特殊な場合として含む、一般的な数理計画問題である。また、LCP は双行列ゲームや平均閉路ゲームの均衡解を求める問題を含んでおり、経済学やゲーム理論とも関連が深い。

研究開始直前に、申請者のグループによって、疎性を持つ線形相補性問題(LCP)に対して、効率的なアルゴリズムが提案された。その解析手法を発展させ、LCP の中で理論的に重要なクラスである P-LCP の計算複雑度の解明に取り組む。P-LCP の計算複雑度の解決に向けて、疎性をパラメータとした実用的に高速な固定パラメータ・アルゴリズムを提案する。計画では理論的な検証を中心に行なうが、計算機実験によりアルゴリズムの挙動を観察するなど理論・実験の両面からアプローチする。また、経済学やゲーム理論など応用の文脈に現れる LCP に対して、内在する組合せ的性質を明らかにすることで効率的なアルゴリズムを設計する。そのためにゲーム理論との関連の調査や整数性の解析を行なう。

4. 研究成果

「研究目的」に挙げた目的ごとに分けて記述する。

(1) 本課題では、構造的グラフ理論を利用し、さまざまなグラフ上の詰め込み・被覆型の問題に対して、Erdős-Pósa 性の解析と効率的なアルゴリズムの設計を行なった。これらは構造的グラフ理論の新しいアルゴリズム的応用として位置づけられる。

サイクルを大幅に一般化した概念である K_5 イメージョンというオブジェクトを詰め込む問題に対して Erdős-Pósa 性の解析を行なった。具体的には、Erdős-Pósa 性が一般のグラフでは成り立たないこと、そして、もしグラフを 4 辺連結グラフに限れば Erdős-Pósa 性を持つことを示した。さらに、 K_5 イメージョンを一般化した K_r イメージョンに対しても同様の結果を得ている。

上記の成果により、イメージョンを持たないグラフに対する組合せ的構造が明らかになった。それを利用することで以下の成果を得た。

グラフの彩色問題とは隣り合う頂点が異なる色を持つように頂点を塗る問題であり、グラフ理論における基本的な問題である。彩色問題に関する有名な結果として、グラフが平面的ならば 4 色で彩色できること (4 色定理) が知られている。4 色定理の一般化である Hadwiger 予想は k 頂点のクリーク K_k をマイナーとして含まないグラフは $(k-1)$ 色で彩色できるという予想であり、グラフ理論における重要な未解決問題のひとつである。本研究では、マイナーと似た概念であるイメージョンという関係を考え、イメージョンを含まないグラフを効率的に彩色するアルゴリズムを提案した。

指定された頂点を含む奇数長歩道(オイラー部分グラフ)を、互いに辺を共有しないように詰め込む問題は、奇数長サイクルを詰め込む問題と、指定された頂点を通るサイクルを詰め込む問題の共通の一般化である。この問題に対して、グラフが 4 辺連結ならば Erdős-Pósa 性が成立することを示した。そして、その証明をもとに、4 辺連結グラフにおいて、指定された頂点を含む奇数長歩道を k 個辺素に見つけられるかを判定する問題に対して、固定パラメータ・アルゴリズムを提案した。

(2) 線形相補性問題(LCP)に対して、整数性などの組合せ的構造の解析と、疎性を利用した効率的なアルゴリズムの設計を行なった、

LCP の整数解の性質を調べるために、線形計画問題で知られている概念である完全双対整数性を線形相補性問題に導入した。そのために、LCP の解の中で方向を制限した解を求める問題(方向付き LCP)を提案し、それを利用して LCP の双対問題を定義した。そして、LCP が整数解をもつための十分条件を導いた。

LCP は一般に NP 困難であり多項式時間で計算することが難しいが、双行列ゲームなど実際の応用に現れる LCP の多くは、疎性などの良い組合せ的性質を持つことが多い。本研究では、入力の疎性と解の疎性をパラメータと

することで、LCP に対して効率的なアルゴリズム(固定パラメータ・アルゴリズム)を設計した。また、入力の疎性と解の疎性のいずれかのみがパラメータの場合は計算困難であることを示した。

また、効率的に計算できる組合せ最適化問題の構造を解析することで、以下の成果を得た。

(3) マトロイド交わり問題は最も基本的な組合せ最適化問題のひとつである。この問題は、二部グラフの最大マッチング問題や、無向グラフの全域木詰め込み問題、有向グラフの有向木詰め込み問題などを特殊な場合として含み、また、電気回路解析やネットワーク符号化など様々な工学的応用をもつ。マトロイド交わり問題は 1970 年代に提案されて以降、多数の高速なアルゴリズムが提案されている。本研究では、重み付きマトロイド交わり問題に対して新しいアルゴリズムを提案した。アルゴリズムの主なアイデアは、重みを分解し、重み無しマトロイド交わり問題に帰着することである。また、提案アルゴリズムの枠組みは高速な近似アルゴリズムの設計にも利用できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Naonori Kakimura, Ken-ichi Kawarabayashi, and Yusuke Kobayashi, Packing Edge-disjoint Odd Eulerian Subgraphs through Prescribed Vertices in 4-edge-connected Graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(2), pp.766-782, 2017, DOI:10.1137/15M1022239. 査読有

Hanna Sumita, Naonori Kakimura, and Kazuhisa Makino, Parameterized Complexity of Sparse Linear Complementarity Problems, *Algorithmica*, to appear, 2016, DOI:10.1007/s00453-016-0229-5. 査読有

Naonori Kakimura and Ken-ichi Kawarabayashi, Coloring Immersion-Free Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 121, 2016, pp.284-307, DOI:10.1016/j.jctb.2016.07.005. 査読有

Chien-Chung Huang, Naonori Kakimura, and Naoyuki Kamiyama, Exact and Approximation Algorithms for Weighted Matroid Intersection, *The 27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2016)*, pp.430-444, 2016. 査読有

Hanna Sumita, Naonori Kakimura, and Kazuhisa Makino, Parameterized Complexity of Sparse Linear Complementarity Problems, *The 10th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC 2015)*, pp.355-364, 2015. 査読有

Naonori Kakimura and Ken-ichi

Kawarabayashi, Fixed-Parameter Tractability for Subset Feedback Set Problems with Parity Constraints, *Theoretical Computer Science*, 576, 2015, pp.61-76, DOI:10.1016/j.tcs.2015.02.004. 査読有

Hanna Sumita, Naonori Kakimura and Kazuhisa Makino, The Linear Complementarity Problems with a Few Variables per Constraint, *Mathematics of Operations Research*, 40(4), pp.1015-1026, 2015, DOI:10.1287/moor.2014.0708. 査読有

Takehiro Ito, Naonori Kakimura, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi and Yoshio Okamoto, Minimum-Cost b -Edge Dominating Sets on Trees, *Proceedings of the 25th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2014)*, *Lecture Notes in Computer Science*, 8889, pp.195-207, 2014.

DOI: 10.1007/978-3-319-13075-0_16. 査読有

Norie Fu, Vorapong Supakitpaisarn, Kei Kimura, and Naonori Kakimura, Maximum Lifetime Coverage Problems with Battery Recovery Effects, *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2014)*, pp.118-124, IEEE Xplore, 2014. 査読有

垣村尚徳, 詰め込み問題とグラフマイナー理論, 数学セミナー, 通巻 627号(53(1)), pp.25-29, 2014-01. 査読無

Naonori Kakimura and Kazuhisa Makino, Robust Independence Systems, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(3), pp.1257-1273, 2013.

DOI:10.1137/120899480. 査読有

[学会発表](計 19 件)

垣村尚徳, 劣モジユラ関数最大化に対するストリーミングアルゴリズム, 日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の基盤とフロンティア」研究部会(WOO), 沖縄県市町村自治会館(沖縄県那覇市), 2017年3月14日.(招待講演)

垣村尚徳, マトロイド交わり問題とその解法, 第13回組合せ論若手研究集会, 慶應義塾大学(神奈川県横浜市), 2017年3月1日-2日.(招待講演)

垣村尚徳, 河原林健一: イメージョンを含まないグラフに対する彩色アルゴリズム, 日本応用数理学会 2016 年年会, 北九州国際会議場(福岡県北九州市), 2016年9月12日-14日.

Takehiro Ito, Naonori Kakimura, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi and Yoshio Okamoto, Efficient Stabilization of Cooperative Matching Games, *International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pp.41-49, 2016年5月9日-13日, Singapore

(Singapore).

伊藤建洋, 垣村尚徳, 神山直之, 小林佑輔, 岡本吉央, ネットワーク型交渉ゲームの安定化アルゴリズム, 第157回アルゴリズム研究会, 2016年3月6日, 電気通信大学(東京都調布市).

垣村尚徳, 劣モジユラ関数最大化とその機械学習への応用, 企画セッション4: 機械学習と組合せ最適化, 第18回情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2015), つくば国際会議場(茨城県つくば市), 2015年11月25日-27日.(招待講演)

黄建中, 垣村尚徳, 神山直之, 重み付きマトロイド交わり問題に対する厳密解法と近似解法, 2015年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 九州工業大学(福岡県北九州市), 2015年9月10日-11日.

Chien-Chung Huang, Naonori Kakimura and Naoyuki Kamiyama, Exact and Approximation Algorithms for Weighted Matroid Intersection, *The 22nd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP)*, Pittsburgh(U.S.), July 12-17, 2015.

Hanna Sumita, Naonori Kakimura and Kazuhisa Makino, Total Dual Integrality of the Linear Complementarity Problem, *The 22nd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP)*, Pittsburgh(U.S.), July 12-17, 2015.

Chien-Chung Huang, Naonori Kakimura, and Naoyuki Kamiyama, Weighted Matroid Intersection Algorithms via Weight Decomposition, *The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, pp.168-176, 九州大学西新プラザ(福岡県福岡市), 2015年6月2日-5日.

Hanna Sumita, Naonori Kakimura, and Kazuhisa Makino, Total Dual Integrality of the Linear Complementarity Problem, *The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, pp.342-351, 九州大学西新プラザ(福岡県福岡市), 2015年6月2日-5日.

伊藤建洋, 垣村尚徳, 神山直之, 小林佑輔, 岡本吉央, 木における最小費用 b -辺支配集合問題, 2015年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 44-45, 東京理科大学(東京都新宿区), 2015年3月26日-27日.

澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久: 線形相補性問題のパラメータ化計算量, 2015年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 38-39, 東京理科大学(東京都新宿区), 2015年3月26日-27日.

澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久: 線形相補性問題のパラメータ化計算量, 2015年電子情報通信学会総合大会 COMP-ELC 学生シンポジウム, DS-1-13, 2015年3月10日-13日, 立命館大学(滋賀県草津市).

澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久: 方向つき線形相補性問題の計算複雑度, 2014 年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 54-55, 北海道科学大学(北海道札幌市), 2014 年 8 月 28 日-29 日.

Naonori Kakimura, Yusuke Kobayashi and Ken-ichi Kawarabayashi, Packing Edge-Disjoint Odd S -Cycles in 4-Edge-Connected Graphs, *SIAM Conference on Discrete Mathematics*, Minneapolis(U.S.), June 16-19, 2014.

Naonori Kakimura and Ken-ichi Kawarabayashi, Packing Edge-Disjoint K_5 -Immersion in 4-Edge-Connected Graphs, *The Asian Mathematical Conference 2013(AMC 2013)*, Busan(Korea), June 30-July 4, 2013. (Session Invited Talk)

澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久: 線形相補性問題の整数性, 2014 年研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 2014 年 3 月 25 日-26 日, 政策研究大学院大学(東京都港区).

澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久: 線形相補性問題の完全双対整数性, 2014 年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 2014 年 3 月 6 日-7 日, 大阪大学(大阪府豊中市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

垣村 尚徳 (KAKIMURA, Naonori)

東京大学・大学院総合文化研究科・講師

研究者番号: 30508180