様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５７３０００９

研究課題名（和文）動的システム解析における組合せ的な行列計算手法の研究

研究課題名（英文）Combinatorial Methods for Matrix Computation in Dynamical Systems Analysis

研究代表者
高松　瑞代（TAKAMATSU, Mizuyo）

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：７０５８００５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：動的システム解析の分野では，数値情報を捨象することでグラフ理論に基づく手法を利用する構造的アプローチが研究されてきた．構造的アプローチに基づく手法は高速である一方で，数値情報を捨象しているため結果が正しいとは限らないという大きな問題点がある．
組合せ的行列理論とは，行列計算と組合せ最適化手法を融合した理論であり，数値計算手法の一部に組合せ的なアプローチを取り入れることで，数値計算の負担を減らすことを可能にする．本研究課題では，動的システム解析のための組合せ的行列理論に基づく手法を開発した．

研究成果の概要（英文）：Many modeling and simulation tools for dynamical systems adopt algorithms based on the structural approach. An advantage of the structural approach is that it is supported by efficient combinatorial algorithms that are free from errors in numerical computation. On the other hand, however, algorithms based on the structural approach sometimes fail because they discard numerical information.
Combinatorial matrix theory is a branch of mathematics that combines combinatorial optimization techniques and matrix computation. In this research, we develop algorithms to analyze dynamical systems based on combinatorial matrix theory.

研究分野：数理工学

キーワード：行列束　微分代数方程式　Kronecker標準形　混合行列理論　動的システム解析

１．研究開始当初の背景

電気回路，機械力学系，化学プラントなどの多くの動的システムは，微分代数方程式(Differential-Algebraic Equations; DAE)を用いて記述される．DAE の解析的・数値的難しさの指標として指数が定義されており，指数が大きくなるほど数値計算は困難になる．1980 年以降には DAE を解くソフトウェアが開発されてきたが，多くのソフトウェアは指数の小さい DAE にしか適用することができない．

DAE を解くためには，まず指数を計算し，指数が大きい場合には指数減少法を適用して指数の小さい DAE に変換することが一般的である．したがって，高速で数値誤差に強い指数計算法と指数減少法が必要とされている．DAE の指数計算法や指数減少法を始めとする動的システムの解析手法は，数値解析の分野で盛んに研究されている．

動的システム解析や DAE の分野において，数値情報を捨象することでグラフ理論に基づく手法を利用する構造的アプローチが研究されてきた．現在主流の指数減少法は

・Pantelides(1988)のアルゴリズム
・Mattsson-Söderlind(1993)の dummy derivative approach
・Pryce (2001)の Σ-method

といった構造的アプローチに基づいており，動的システムのモデリング・シミュレーション用ソフトウェアである Dymola，OpenModelica，MapleSim などで利用されている．これらの指数減少法はグラフ理論を用いるため高速である一方で，数値情報を捨象しているため結果が正しいとは限らないという大きな問題点がある．

組合せ最適化の分野では，高速で数値誤差に強い計算手法を開発するために，数値計算と組合せ的手法を融合することが必要であると考えられている．組合せ的行列理論とは，行列計算と組合せ最適化手法を融合した理論であり，数値計算手法の一部に組合せ的なアプローチを取り入れることで，数値計算の負担を減らすことを可能にする．組合せ的行列理論に基づく動的システム解析手法は，高速で数値誤差に強い手法として期待されている．

組合せ的行列理論を用いた研究の流れは，大きく以下の二つに分けられる．

⑴ 物理的な情報の利用：混合行列理論

混合行列理論は，電気回路に対する観察から 1980 年代に室田・伊理により提唱された．その特徴は，行列の非零成分を単なる数値とみなさずに，その数値の持つ物理的意味をも考慮する点にある．単純な電気回路を例にとると，抵抗値は測定誤差の影響により公称値とは異なるため，数値情報を捨象し，独立パラメータとみなすことができる．一方，キルヒホッフの保存則の係数は正確な数値であるため，数値情報を捨象できない．このように，混合行列理論では「物理量を表す誤差を含む数値」と「誤差を含まない正確な数値」を区別する．これにより，様々な行列計算が簡単になることがある．行列を混合行列とみなすことで，組合せ最適化分野で発展してきたマトロイド理論を利用した効率的で数値誤差に強いアルゴリズムの設計が可能になる．

⑵ 零・非零構造の利用：組合せ緩和法

混合行列理論では，行列の数値を「正確な数値」と「独立パラメータ」に分類するために，背景にある動的システムの情報が必要である．しかし時には行列のみが与えられ，背景にある動的システムの情報がないことがある．このような場合には，行列の成分の零・非零構造に着目した組合せ緩和法が有用である．

組合せ緩和法は，組合せ的なアルゴリズムを用いて解の推定値を求め，その妥当性を確認するステップにおいてのみ数値計算を行うという，画期的な手法である [Murota 1990]．大部分で組合せ的なアルゴリズムを用いるため効率的なだけでなく，所与の行列の疎性を保つこともできる．

動的システム解析では高速で数値誤差に強い計算手法が必要とされており，組合せ的行列理論に基づく手法の開発が求められている．

２．研究の目的

定数係数線形 DAE をラプラス変換すると，得られる方程式系の係数行列は各成分の次数が高々1 の多項式行列となる．このような行列を行列束(matrix pencil)と呼ぶ．定数係数線形 DAE の指数は係数行列束の Kronecker 標準形により定義される．Kronecker 標準形は摂動に対して非常に不安定であるため，数値誤差に強い計算手法の開発が必要とされている．

本研究では，組合せ的行列理論を利用することで，高速で数値誤差に強い

(1) Kronecker 標準形の計算手法
(2) DAE の指数計算法

の提案を行う．また，組合せ的行列理論のさらなる発展を目指し，

(3) 組合せ緩和法の枠組みの拡大
(4) 混合行列理論の展開

を図る．

(1) Kronecker 標準形の計算手法

非正則な Kronecker 標準形の数値計算は，正則な場合よりも扱いにくいことが知られている．安定で数値誤差に強い計算手法を開発するためには，数値計算のみに頼るのではなく，組合せ的手法を融合することが必要で

ある．本研究では，背景にある物理モデルの情報や行列束の零・非零構造を利用することで，Kronecker 標準形を効率的に計算する手法を開発する．

動的システムを記述する行列には構造方程式に由来する正確な数値が現れることから，正確な数値と独立パラメータを区別する混合行列の概念が室田・伊理によって提唱されている．数値を二種類に区別するのは数学モデルとして非常に自然な議論であり，混合行列はこれまで様々な分野に応用されてきた．

混合行列の行列束版を混合行列束と呼ぶ．正則な混合行列束の Kronecker 標準形に対しては，小行列式の最大次数を経由する計算法と展開行列の階数を利用する計算法が提案されている．非正則な行列束の Kronecker 標準形の計算は，正則な場合よりも難しいことが知られている．本研究では，非正則な混合行列束の Kronecker 標準形をマトロイド理論的に解析する．

⑵ DAE の指数計算法

電気回路を記述する DAE を対象として，指数計算法を提案する．回路シミュレーションでは，回路解析法を用いて式を導出するのが一般的である．自由度の高い回路解析法として混合解析が挙げられる．独立電源，抵抗，インダクタ，キャパシタを含む非線形時変回路に対し，混合解析で導出される DAE（混合方程式）の指数が常に 1 以下になることが示された [Iwata-Takamatsu-Tischendorf 2012]．本研究では，従属電源を含む非線形時変回路に対する混合方程式の指数を解析する．

⑶ 組合せ緩和手法の枠組みの拡大

組合せ緩和法はこれまで，DAE の指数と関係が深い，多項式行列の小行列式の最大次数の計算にしか用いられていなかった．本研究では，組合せ緩和法を小行列式の最大次数の計算以外の問題に対して適用できるように枠組みの拡大を目指す．

⑷ 混合行列理論の展開

混合行列理論の既存研究では，主に電気回路などの動的システムの記述に現れる行列を対象としてその有用性を示してきた．本研究では，混合行列理論の適用範囲拡大を目指す．

３．研究の方法

(1) Kronecker 標準形の計算手法

Kronecker 標準形は，複数の正方・長方ブロックからなるブロック対角行列である．岩田・清水(2007)の研究では，行列束の各係数が独立パラメータであるという仮定のもとで，長方ブロックのサイズの和に対する組合せ的特徴づけが与えられている．本研究では，岩田・清水(2007)の結果を混合行列束に拡張する．

岩田・清水(2007)の研究では，行列束に Dulmage–Mendelsohn 分解（DM 分解)を適用し，長方ブロックのサイズの和を水平尾と垂直尾のブロックに対する特徴づけによって表現している．混合行列束では，DM 分解の代わりに組合せ論的正準形(combinatorial canonical form; CCF)を利用する．室田(1991)によって提案された既存の CCF の計算法では，計算結果が行列束ではなくなるという問題点があった．本研究では CCF の水平尾に着目して既存手法を改良することで，この問題点を解決する．

(2) DAE の指数計算法

DAE の代表的な指数には，Kronecker 指数，微分指数，摂動指数，順良指数(tractability index)などがある．定数係数線形 DAE の場合，これらの指数はすべて一致することが知られている．ここでは，電気回路を記述する DAE の解析によく利用される順良指数を用いて，混合方程式を解析する．

(3) 組合せ緩和手法の枠組みの拡大

行列束の各成分の係数は独立パラメータであるという仮定の下で，DAE の指数減少法が Pantelides(1988), Mattsson-Söderlind (1993), Pryce(2001)によって研究されている．Pryce の手法と，岩田・清水(2007)による Kronecker 標準形の組合せ論的解析，室田(1995)による組合せ緩和法に基づく指数計算法の関係を明らかにする．

これらの研究はそれぞれ，指数減少法，Kronecker 標準形の特徴づけ，指数計算法と一見異なるテーマを扱っているが，行列束から導かれる 2 部グラフの最大重みマッチングを利用しているという共通点がある．3 つの研究における考え方や提案手法の関係を整理することで得られた知見に基づき，組合せ緩和法の枠組みに基づく指数減少法を提案する．

(4) 混合行列理論の展開

混合行列理論では，同じ独立パラメータは複数回出現しないという仮定をおくことで，マトロイド理論に帰着して効率的な解法を与えている．電気回路の分野に現れる多くの行列はこの仮定を満たすため，混合行列理論は主に電気回路の分野で利用されてきた．

同じ独立パラメータが 2 回出現する混合歪対称行列に対しては，デルタマトロイドとの関係が明らかになっている．混合行列理論の適用範囲のさらなる拡大を目指し，混合行列理論を用いてスケジューリング問題に対するアルゴリズムを構築する．

４．研究成果

(1) Kronecker 標準形の計算手法

非正則な行列束の Kronecker 標準形に対して提案されていた構造的アプローチに基づく岩田・清水(2007)の結果を，物理次元に関する整合性の仮定を満たす混合行列束に拡張し，Kronecker 標準形の構造指数をマトロイド理論的に解析した．さらに制御分野への応用として，動的システムの構造可制御部分空間の次元を計算するアルゴリズムを提案した．

(2) DAE の指数計算法

独立電源，従属電源，抵抗，インダクタ，キャパシタを含む非線形時変回路を対象として，混合方程式の指数が 2 となる回路の構造的特徴づけを与えた．この特徴づけを利用することで，数値計算を行うことなく，回路の構造をみるだけで Kronecker 標準形に関する情報を得ることができる．

(3) 組合せ緩和法の枠組みの拡大

室田(1995)により提案された組合せ緩和法は，これまで小行列式の最大次数の計算にしか用いられていなかった．本研究では，組合せ緩和法の枠組みを動的システム解析で非常に重要な指数減少法へ拡げた．

既存の組合せ緩和法では，組合せ的なアルゴリズムによって得られる解の推定値が解の上界であるという特徴があり，各反復で推定値を減少させることでアルゴリズム終了時には推定値と解が一致することが保証されていた．

今回提案する組合せ緩和法の枠組みでは，解の推定値が上界になるとは限らないという点で，既存手法と大きく異なる．しかし，推定値の更新ステップを工夫することで，アルゴリズム終了時には推定値と解が一致することを保証している．

Pantelides のアルゴリズムに基づく指数減少法は数値情報を捨象しているため，定数係数線形 DAE であっても結果が正しいとは限らないという大きな問題点があった．本研究では組合せ緩和法を利用することでこの問題点を解決し，定数係数線形 DAE に対して最適性を保証するアルゴリズムを提案した．実際，Matlab の関数 reduceDAEIndex が失敗する例に対して，提案するアルゴリズムが正しく動作することを確認した．

(4) 混合行列理論の展開

混合行列理論の応用として，各独立パラメータが 2 回現れる混合歪対称行列を用いてスケジューリング問題の制約が記述できることを示し，制約つきマッチング問題に対して混合歪対称行列の理論を用いたアルゴリズムを提案した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① S. Iwata and <u>M. Takamatsu</u>: On the Kronecker canonical form of singular mixed matrix pencils, *SIAM Journal on Control and Optimization*, to appear. [査読あり]

② N. Kakimura and <u>M. Takamatsu</u>: Matching problems with delta-matroid constraints, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 28, pp. 942-961, 2014. [査読あり]
DOI:10.1137/110860070

③ <u>M. Takamatsu</u>: Structural characterization of hybrid equations with tractability index at most two, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 411, pp. 639-651, 2014. [査読あり]
DOI:10.1016/j.jmaa.2013.10.018

〔学会発表〕（計 4 件）

① 岩田覚, <u>高松瑞代</u>: ユニモジュラ変換による微分代数方程式の指数減少法, 日本応用数理学会 2016 年度年会, 北九州, 2016 年 9 月.

② 岩田覚, <u>高松瑞代</u>: 構造可制御部分空間のマトロイド理論的解析, 日本応用数理学会 2016 年研究部会連合発表会, 神戸, 2016 年 3 月.

③ 岩田覚, <u>高松瑞代</u>: 非正則混合行列束の Kronecker 標準形に関する組合せ論的解析, 日本応用数理学会 2015 年度年会, 金沢, 2015 年 9 月.

④ S. Iwata and <u>M. Takamatsu</u>: On the Kronecker canonical form of singular mixed matrix pencils, The 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Veszprém, June 2013.（ハンガリー）

〔図書〕（計 0 件）

６．研究組織

(1) 研究代表者

高松 瑞代（TAKAMATSU, Mizuyo）
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号：70580059