

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 2 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2014

課題番号：25780152

研究課題名(和文) ノンパラメトリック操作変数モデルに対するベイズ推定の理論的展開

研究課題名(英文) Development of Bayesian estimation of nonparametric instrumental variables models

研究代表者

加藤 賢悟 (KATO, Kengo)

東京大学・経済学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：50549780

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ノンパラメトリック操作変数モデルに対するベイズ推定に関して、理論的な研究を進めた。具体的には、擬事後分布のシャープな縮退レート、および、事後平均によって定義される構造関数のベイズ推定量のシャープな収束レートを導出した(より正確にはそのようなシャープなレートを達成するための事前分布の条件を導出した)。内生変数が多変量であるケースや、外生変数があるケースへの拡張も考察した。加えて、上記の結果の、ノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデルへの拡張を考察した。

研究成果の概要(英文)：I have studied Bayesian estimation of nonparametric instrumental variables models. Specifically, I have derived sharp contraction rates for the quasi-posterior, and sharp convergence rates for the Bayesian estimator defined by the posterior expectation (more precisely, I have derived conditions for priors under which these sharp rates are attained). I have also studied extensions to the cases where there are multivariate endogenous variables and exogenous variables. In addition, I have studied extensions of these results to nonparametric instrumental variables quantile regression models.

研究分野：数理統計学、計量経済学

キーワード：計量経済学 ベイズ推定 ノンパラメトリック操作変数モデル

1. 研究開始当初の背景

回帰モデルにおいて説明変数と誤差項が関連しているとき、説明変数は内生的とよび、そのような内生性のある回帰モデルの推定は計量経済学の主要なトピックの一つと言える。内生性のあるモデルの標準的な推定方法は、構造関数が内生変数の線形関数と仮定して、適当な操作変数を用いて構造パラメータを推定する、というものであるが、近年の計量経済学の文献においては、構造関数の関数形を仮定せずにノンパラメトリックに推定する手法が関心を集めてきている。ノンパラメトリック操作変数モデルに関しては、Horowitz (2011, *Econometrica*)によるレビュー論文が参考になる。また、代表的な応用例として、Blundell, Chen and Kristensen (2007, *Econometrica*)によるエンゲル関数の推定があげられる。ところで、ノンパラメトリック操作変数モデルにおいて、構造関数の推定問題は数学的には、ill-posed な逆問題であり、古典的な線形操作変数モデルの推定や、通常のノンパラメトリック推定とは異なる固有の難しさがあることを指摘しておく。

ノンパラメトリック操作変数モデルの推定は純粋に頻度論的なアプローチによるものがほとんどであり、ベイズ推定に関する研究は少ない。例外として、Liao and Jiang (2011, *Annals of Statistics*)があるが、彼らは(擬)事後分布の一致性しか示していない。例えば、事後平均によって定義されるベイズ推定量の収束レートや、事後分布に基づく構造関数の統計的推測に関する正当性はわかっていなかった。

頻度論的な推定と比較したときのベイズ推定の利点として、先験的な制約(例えば、構造関数の単調性)を推定に組み込みやすい点があげられる。また、計算上の利点も指摘しておきたい。ノンパラメトリック操作変数モデルの一つの重要なバージョンとして、ノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデルがある。このモデルは、Horowitz and Lee (2007, *Econometrica*)や、Chen and Pouzo (2012, *Econometrica*)において頻度論的な推定手法の理論解析がなされているが、彼らの推定手法は、指示関数を含む(従って不連続な)目的関数の高次元最適化を要するので、最適化が難しい。しかしながら、事後平均によって構造関数を推定する場合、原理的に事後分布からのサンプリングの算術平均をとるだけなので、最適化を要さない。ゆえに、ベイズ推定は、既存の頻度論的な推定手法に比べて安定的に推定を実行できると予想される。

2. 研究の目的

ノンパラメトリック操作変数モデルは古典的な線形操作変数モデルのノンパラメトリック版であり、近年の計量経済学の文献で特

に注目を集めているモデルと言える。本研究課題の目的は、ノンパラメトリック操作変数モデルに対して、ベイズないし擬ベイズ的な推定手法の漸近的な性質を明らかにすることにある。特に(擬)事後分布のシャープな縮退レートの導出、およびノンパラメトリック版のベルンシュタイン・ヴォンミーゼス型の結果はまだフォーマルには導出されていない。これらの結果はベイズ的な手法を用いて構造関数を推定ないし統計的に推測する際にキーになる理論的結果である。また、ノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデルに対してもベイズ的手法の漸近理論を整備する。

3. 研究の方法

ノンパラメトリック操作変数モデルに対するベイズ推定の漸近理論に関する研究を進める。具体的には、擬事後分布のシャープな縮退レートの導出を行う。また、擬事後分布に基づく構造関数の統計的推測手法を確立するために、擬事後分布に対してノンパラメトリック版のベルンシュタイン・ヴォンミーゼス型定理を証明する。本研究課題では、条件付き平均制約から誘導される擬尤度を考え、さらに構造関数の級数展開を有限近似し、一般化フーリエ係数に事前分布を導入することで、擬事後分布を構成する。このとき、一般化フーリエ展開の打ち切りレベルは、バイアスの影響を極限では無視できるようにするために、標本サイズとともに増やす必要がある。従って、本研究課題は「パラメータの次元が標本サイズとともに増えていくベイズ統計」を考察しているといえる。ところで、「パラメータの次元が標本サイズとともに増えていく統計モデル」は、近年の統計学・計量経済学において中心的な課題の一つであり、解析に必要な数理的な道具の開発も著しく進んでいる。本研究課題においても、そのような最近の数理的な発展を積極的に取り入れ、よりシャープな数理的成果を導出することを目指す。漸近理論の考察に加えて、数値実験を通じて、ベイズ推定量および擬事後分布に基づく統計的推測手法の妥当性を検証する。擬事後分布を構成するとき、一般化フーリエ展開の打ち切りレベルを適当に決める必要があるが、打ち切りレベルの選択手法を数値実験を通じて比較する。

また、上記の結果のノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデルへの拡張を考察する。分位点回帰モデルの場合、構造関数の推定問題が ill-posed な非線形逆問題になるので、数理的な取り扱いがより難しくなる。しかしながら、分位点効果(quantile effect)すなわち、説明変数が条件付き分布の分位点に与える影響を測定することは、例えば政策効果の測定として意味があり、本研究は応用上の意義が認められる。また、ノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデルに対しては、ベ

ズ推定が計算上の利点を有しているので、その理論的性質の解明は計量経済学の文献への重要な貢献となる。

4. 研究成果

ノンパラメトリック操作変数モデルに対するベイズ推定に関して、理論的な研究を進めた。具体的には、 Y 、 X 、 W をそれぞれ、目的変数、内生変数、操作変数としたとき、 $Y=g(X)+U$ 、 $E[U | W]=0$ なるモデルをノンパラメトリック操作変数モデルと呼ぶ。このとき、前述した方法で擬尤度を考えると、構造関数 g のベイズ推定を実行することができる。本研究課題は、このようにして得られた擬事後尤度のシャープな縮退レート、および、事後平均によって定義される構造関数のベイズ推定量のシャープな収束レートを導出した（より正確にはそのようなシャープなレートを達成するための事前分布の条件を導出した）。内生変数が多変量であるケースや、外政変数があるケースへの拡張も考察した。以上の結果をまとめた論文は、Annals of Statistics に掲載された（発表論文の）。次に、上記の結果のノンパラメトリック操作変数分位点回帰モデル（NPIV-QR モデル）への拡張を考察した。このモデルは $\tau \in (0, 1)$ を固定したとき、 $Y=g(X)+U$ 、 $P(U \leq 0 | W)=\tau$ と記述される。既存の NPIV-QR モデルの推定手法は、不連続な目的関数の高次元最適化を要するため、数値的に不安定であり、原理的には最適化を必要としないベイズ推定はこのモデルに対して特に適していると思われる。NPIV-QR モデルに対しては、期間中に論文にまとめることはできなかったが、継続して研究を進めていく予定である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 8 件)

V. Chernozhukov, D. Chetverikov, K. Kato, Comparison and anti-concentration bounds for maxima of Gaussian random vectors, Probability Theory and Related Fields, 査読有, 2015, 印刷中.

DOI: 10.1007/s00440-014-0565-9

A. Belloni, V. Chernozhukov, K. Kato, Uniform post selection inference for LAD regression and other Z-estimation problems, Biometrika, 査読有, Vol. 102, 2015, 77-94.

DOI: 10.1093/biomet/asu056

V. Chernozhukov, D. Chetverikov, K. Kato, Anti-concentration and honest, adaptive confidence bands, Annals of Statistics, 査読有, Vol. 42, 2014, 1787-1818.

DOI: 10.1214/14-AOS1235

V. Chernozhukov, D. Chetverikov, K. Kato, Gaussian approximation of suprema of empirical processes, Annals of Statistics, 査読有, Vol. 42, 2014, 1564-1597.

DOI: 10.1214/14-AOS1230

A. Galvao, K. Kato, Estimation and inference for linear panel data models under misspecification when n and T are large, Journal of Business and Economic Statistics, 査読有, Vol. 32, 2014, 285-309.

DOI: 10.1080/07350015.2013.875473

A. Galvao, K. Kato, G. Montes-Rojas, J. Olmo, Testing linearity against threshold effects: uniform inference in quantile regression, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 査読有, Vol. 66, 2014, 413-439.

DOI: 10.1007/s10463-013-0418-9

V. Chernozhukov, D. Chetverikov, K. Kato, Gaussian approximations and multiplier bootstrap for maxima of sums of high-dimensional random vectors, Annals of Statistics, 査読有, Vol. 41, 2013, 2786-2819.

DOI: 10.1214/13-AOS1161

K. Kato, Quasi-Bayesian analysis of nonparametric instrumental variables models, Annals of Statistics, 査読有, Vol. 41, 2013, 2359-2390.

DOI: 10.1214/13-AOS1150

〔学会発表〕(計 13 件)

加藤賢悟, 高次元中心極限定理に関するいくつかのトピック, 日本統計学会春季集会, 2015年3月8日, 明治大学(東京都・中野区).

Kengo Kato, Testing many moment inequalities, Econometric Seminar (Yale University, Department of Economics), 2015年2月18日, ニューヘイブン(アメリカ).

Kengo Kato, Testing many moment inequalities, Department Seminar (Seoul National University, Department of Economics), 2014年11月27日, ソウル(韓国).

Kengo Kato, Gaussian approximation of suprema of empirical processes, 3rd IMS-APRM, 2014年6月29日-7月3日, 台北(台湾).

Kengo Kato, Quasi-Bayesian analysis of nonparametric instrumental variables models, Econometric Society Asian Meeting, 2014年6月20日-2014年6月22日, 台北(台湾).

Kengo Kato, Testing many moment inequalities, Cemmap workshop "Advances in Microeconometrics", 2014

年5月23日-5月24日, 香港(中国).

Kengo Kato, Gaussian approximation of suprema of empirical processes, NUS workshop “Self-normalized Asymptotic Theory in Probability, Statistics, and Econometrics”, 2014年5月14日-5月22日, シンガポール(シンガポール).

Kengo Kato, Gaussian approximations and multiplier bootstrap for maxima of sums of high-dimensional random vectors, Cemmap Seminar (University College London), 2013年12月16日, ロンドン(イギリス).

Kengo Kato, Estimation in functional linear quantile regression, ERCIM2013, 2013年12月14日-12月16日, ロンドン(イギリス).

Kengo Kato, Gaussian approximation of suprema of empirical processes, Econometric Seminar (Boston University, Department of Economics), 2013年9月27日, ボストン(アメリカ).

加藤賢悟, Gaussian approximation of suprema of empirical processes, 統計関連学会連合大会, 2013年9月8日-9月11日, 大阪大学(大阪府・豊中市).

Kengo Kato, Gaussian approximations and multiplier bootstrap for maxima of sums of high-dimensional random vectors, Bernoulli Society Satellite Meeting, 2013年9月2日-9月4日, 東京大学(東京都・文京区).

Kengo Kato, Gaussian approximations and multiplier bootstrap for maxima of sums of high-dimensional random vectors, Econometric Society Asian Meeting, 2013年8月2日-8月4日, シンガポール(シンガポール).

[その他]

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/kkatostat/home>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 賢悟 (KATO, Kengo)

東京大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号: 50549780