

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：17501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25780531

研究課題名(和文) 数学教育における類推を能率的に活用する授業構成と教材開発に関する実証的研究

研究課題名(英文) Empirical research about construction of lessons and development of teaching materials to utilize analogy efficiently in mathematics education

研究代表者

中川 裕之 (NAKAGAWA, Hiroyuki)

大分大学・教育学部・准教授

研究者番号：00450156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：類推を振り返って、ベースとターゲットが類比となる理由とベースからターゲットに関係を移せる理由を探る方法を明らかにした。前者については、ベースとターゲットは完全に同一ではないので、どのような意味で同じとみなせるかを定めるために、観点を設定することとした。後者については、関係がベースとターゲットの両方で成り立つのは、その根拠となるものが共通であるためととらえ、関係が依拠する基本的な定理を想定することとした。そして、これらの方法で類推を振り返れば、類比となる理由と関係を移せる理由を明らかにでき、その後の類推や発展を促進できることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：My purpose is to shed light on methods of exploring the reasons why target is analogous to base and the reasons that lead to the shift of relationship from base to target by looking back at the reason by analogy. With regard to the former, as base and target for not fully identical, we set the standpoint for deciding in what sense we should regard them identical. For the latter, we regarded that the relation holds true in both base and target because the underlying reasons are same, and therefore we decided to assume the fundamental theorem on which the relation relies upon. I could demonstrate that by looking back at the reason by analogy using these methods, we could clarify the reasons why target is analogous to base and the reasons that lead to the shift of relationship, and we could facilitate subsequent reason by analogy and discover.

研究分野：数学教育学

キーワード：類比 類推 振り返り 教材開発

1. 研究開始当初の背景

我々がしばしば行う、ある問題が既知の似た問題と同じように解けることに気づくといった思考は類推と呼ばれ、二つの対象の類似性に着目し、ベースと呼ばれる既知の対象で成り立つ事柄が、ターゲットと呼ばれる未知の対象でも成り立つであろうと推論するものである。

問題の解き方に気づくには、解法自体もさることながら、どうやって解法を導き出すかを考え、着想や考え方を育てていくことが重要となる。類推して解法を導き出す場合、なぜそれらを思いついたのかに対する答えは「似ている問題の解法を思い出したから」や「似ているから同じ様に考えようと思った」など、似ていることに帰着されることが多い。しかし、「似ているから」で考えることを止めるのでは、なぜ同様に解決できるかがはっきりせず、着想のよさやうまさ分かりづらい。類推においてターゲットに適用される解法は既に知っているものであるため、考えるべきことは、なぜ適用してよいか、ベースとターゲットはどのような関係にあるかである。

ただし、なぜ類似かを説明しても、その場限りの説明となつては、類似とみなす理由に整合性がなくなり、結局、偶然に支配される思いつきを頼りに非能率な類推をすることになる。数学では、少数の原理や法則によって多くの事柄をとらえ、まとめていこうとするため、既存の数学と関係をもたせながら、新しい数学を見だし、発展させていく。類推においても、例えば、二つの対象が同じ原理や法則に基づくのであれば、同様に考えてよいことにも納得がいく。場面や対象によって類似のとらえ方が全く別のものとなつては考えないで、なぜ類似、または、同じとみてよいかを探ることで、同様に解決できる理由を明らかにし、できるだけ一つのとらえ方でまとめていくことが大切となる。

しかし、そのような理論や実践はあまり見られない。その結果、先生の説明も「このような問題はこうやって解く」、「このパターンの問題の解き方は～」など、数学の知識や解き方をばらばらに教え、その結果、数学を暗記教科のように思っている生徒が出てきてしまっている。

2. 研究の目的

数学の学習では、知識や技能を習得する際にそれらを生み出し支えている原理・法則を明らかにすることが望ましく、多くの知識や技能が少数の原理・法則から導かれ、互いに関連し合っていると理解することが大切である。先行研究では、原理・法則を明らかにし、それに基づいて考えることで、新しい学習内容を既習の内容と同じとみなせることや、創造的、発展的に学習を進められることが主張されている。このため、新しい命題を見いだした際には、既存の知識体系とうま

く整合するかを確かめたり、そのために背後にある原理・法則を明らかにしたりすることが大切となる。しかし、発見の推論の一つである類推では、出てきた推測を正当化する必要が指摘されることはあっても、既知の知識との関係や背後にある原理・法則を明らかにすることにはあまり配慮がなされていないのではないだろうか。

数学者である清宮俊雄や栗田稔は、定理の仮定を類似な条件におきかえたときに結論が成り立つかを考えることで問題を設定し、同じように証明しようと類推することで新しい定理を発見している。そこでは定理の発見が目指されているため、仮定や結論が似ているからうまく類推できると説明されるだけで、もとの定理とみつけた定理の関係についてはあまり述べられていない。

数学教育では、問題づくりの授業において、問題の作り方の一つに問題の構成要素を類似のものにおきかえることがある。問題づくりの授業では、問題の内容、構造を深く理解するために、つくった問題を振り返り、原則との関係を考察することが提案されており、構成要素を一般的なものにおきかえた場合には一般的な視点から原題を見直すことがよく行われている。しかし、類似な条件におきかえた場合にどのように振り返るかについては、題材や場面に依存した考察にとどまっており、一般にどのように振り返るべきかまでは述べられていない。類推に関する先行研究でも同様であり、前田(1979)は類推が成功、失敗した場合に、その理由を振り返ることで対象の理解が深まり類推する能力が高まるとしているが、その方法については題材に依存した考察にとどまっている。

認知科学の先行研究を見ると、1980年代から90年代前半は、гентナー(1990)の構造写像理論やホリオークとサガード(1995)の多重制約理論のように、人間の類推に関与する制約として関係レベルの構造や類推する目的などを考慮することで、想起するベースや写像する関係の候補を絞り込むことが考えられていた。しかし、90年代後半からは、類推に関与する制約として抽象的な概念や知識が目されるようになり、類推をベースとターゲットの二項関係ではなく、それらを事例として持つ「抽象されたもの」を加えた三項関係としてとらえるようになってきた(鈴木, 1996)。гентナーら(2003)も、ベースとなる事例を2つに増やして比較することで、個々の事例の特殊性を取り除いて各事例に共通する抽象的な構造を抜き出し、そのうえで想起や写像を行うことを提案し、類比的符号化(analogical encoding)と呼んでいる。抽象されたものに注目する傾向は現在も続いており、例えばターゲットの構造に合う抽象的な知識が働いてベースが生成されるといった生成的な視点から類推が考察されている。このように、ベースとターゲットから抽象することを重視するため、認

知科学では類推プロセスをターゲットの表現、ベースの想起、写像、正当化、学習ととらえており、正当化とは別に、類推した結果から新たな認識を得て知識として保存する学習という過程をおいている。

数学の授業で子どもは表面的な類似に注目してしまい類推を有効に使えていないことが報告されており、関係レベルの構造に着目するように指導する必要性が指摘されている。また、数学の授業で行われる類推では、子どもがうまく類推できないことが多いために、ベースの想起やターゲットへの写像といった重要な部分のほとんどを教師が行っていることも報告されている。このような状況を改善するためには、子どもが行う類推をよりよいものへと変容させる一つの手段となるように、数学という教科の特性を考慮し、類推を振り返って成功、失敗した理由やベースとターゲットに共通する構造を探る方法を究明することが重要と考える。

以上の問題意識から、本研究では、数学が創造される過程で用いられる類推に注目するため、条件を類似なものにおきかえて命題をみつける類推に限定し、振り返り方について考察する。

類推プロセスで重要なのはベースの想起とターゲットへの関係の写像であり、いかにして適切なベースを想起するかと、いかにしてベースからターゲットへ移せる関係を決めるかが問題となる。それゆえ、類推をよりよいものへと変容させていくには、類推を振り返ることで、なぜベースとターゲットを類比とみなしてよかったのかとなぜベースからターゲットへ関係に移せたのかを明らかにすることが必要と考える。それらが明らかになれば、類推した命題を既知の知識とうまく整合させることにもつながるであろう。

そこで、本研究では、類推を振り返り、ベースとターゲットが類比となる理由とベースからターゲットへ関係に移せる理由を探る方法を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

研究の方法は、まず数学者がどのように類比をとらえ、どのように類推しているかを分析することで、上の二つの理由の探り方を理論的に導出する（平成 25 年度）。

導出した方法について具体的な教材で考察し、その有効性や機能について、授業実践も視野に入れて現場教員と議論する（平成 26 年度）。

そして、導出した方法の有効性を調べる授業実践を複数行い（平成 27 年度）、授業実践から得られた結果に基づいてその機能について検討し、類推の振り返り方についてまとめ、結果をホームページに公開、学会発表や論文の形で発表する。また、研究報告書を作成し、配布する（平成 28 年度）。

4. 研究成果

(1)類比のとらえ方

ベースとターゲットが類比となる理由を探るために、観点を設定することとした。また、ベースからターゲットへ関係に移せる理由を探るために、基本的な定理を想定することとした。これらの理由を探ることはベースとターゲットの類比をいかにとらえるかを考えることであるので、観点を設定すること、基本的な定理を想定することを類比のとらえ方と呼ぶこととし、その実際や機能について具体的な教材を通して説明する。

(2)具体的な教材を用いた考察

平行四辺形においてどのような事柄が成り立つかを推測する際、二等辺三角形の性質である「 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC で、辺 AB , AC の中点をそれぞれ P , Q とするとき、 $BQ=CP$ である」ことから「平行四辺形 $ABCD$ で辺 BC , DA の中点をそれぞれ P , Q とするとき、 $AP=CQ$ である」ことを類推したとする。

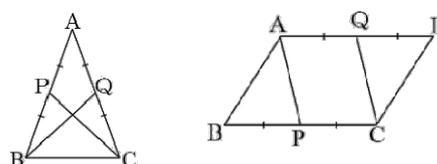


図 1：ベースとターゲットの図

この類推が成功するのは、等しい線分 BQ と CP 、線分 AP と CQ が対称の位置にあるからである。二等辺三角形は線対称な図形、平行四辺形は点対称な図形であるため、これらは「対称な図形」という観点から同じとみなせる。そして、基本的な定理として「対称な図形の対応する線分は等しい」を想定すれば、中線が等しいという関係に移せた理由がわかる。

このように類推を振り返ると、二等辺三角形において中線を角の二等分線や垂線に変えても対称の位置にあり等しいことから、平行四辺形でも同様の変形を行うことを発想できる。また、対称な図形という観点からターゲットを特別な平行四辺形に変えることも発想できる。例えば、長方形においても対称な位置に中線や角の二等分線をひけば等しいことを類推できる。

また、二等辺三角形は対称移動で、平行四辺形は 180° の回転移動で元の図形にぴったりと重なる図形ととらえられることから、観点を「ある移動で元の図形にぴったり重なる図形」（以下では「移動で重なる図形」と呼ぶことにする）と変えることも考えられる。この場合、基本的な定理としては「移動する図形の対応する線分は等しい」を想定する。すると、他の移動で重ねることも可能となるので、より多くの図形をターゲットとして類推することができる。

例えば、正方形は対角線の交点を中心とした 90° の回転移動によって元の図形に重ねられる図形ととらえられる。そのため、正方形をターゲットとすると、図 2 のようにひいた

中線が等しいことを類推できる。そして、重心を中心とした 120° の回転移動で元の図形に重ねられる正三角形でも中線が等しいといったように、他の正多角形でも移動で重なる線分の相等を類推できる。

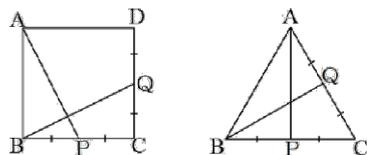


図 2：新たなターゲット

(3) 観点と基本的な定理の関係について

ここでの類推の振り返りでは、まず、二等辺三角形と平行四辺形を「対称な図形」という観点から同じとみなし、基本的な定理として「対称な図形の対応する線分は等しい」を想定した。次に、「移動で重なる図形」という観点から同じとみなし、基本的な定理として「移動する図形の対応する線分は等しい」を想定した。

このことから、観点と基本的な定理に関係があることが示唆される。つまり、観点を設定することでベースとターゲットがあるカテゴリーに属するとみなすため、カテゴリーに属する対象の性質を成り立たせているものが基本的な定理の候補となり、その中から類推する内容に関係しそうなものが選ばれることになると思われる。

(4) 機能について

類比のとらえ方の機能について、具体的な教材を用いた考察をもとに説明する。

ベースとターゲットが類比となる理由を探るために、ベースとターゲットを同じとみなす観点を設定することとした。教材研究では、対称な図形という観点を設定することで、二等辺三角形と平行四辺形を同じとみなせ、類比となる理由を明らかにできた。そして、特別な平行四辺形についても同様に類推できるといったように、新しいターゲットの想起につながるということが示唆された。

また、ベースからターゲットへ関係が移せる理由を探るために、基本的な定理を想定することとした。「対称な図形の対応する線分は等しい」を想定することで、二等辺三角形と平行四辺形の両方で中線が等しくなる根拠がわかり、移せる理由を明らかにできた。そして、中線を角の二等分線や垂線に変えることなど、他のどんな関係がベースからターゲットへ移せるかが示唆された。

さらに、類比のとらえ方で類推を振り返ることで、その後類推する際に観点を設定したり基本的な定理を想定したりするように変容することが考えられる。そうなれば、観点を対称な図形から移動で重なる図形に変えることで正多角形の性質をみつけたように、観点を適切に変更することで多様な類推を行うことを期待できる。そうして類推した命

題を観点や基本的な定理に基づいて整理していけば、整理した命題間の関係を活用して類推や発展を行うことも期待できる。

したがって、本研究では、類比のとらえ方の機能を「類推を振り返る際に用いることで類推できた理由を明らかにすること」と、そのような振り返りによって「類推する際にも用いるようになることでその後の類推を促進すること」とした。

<引用文献>

- ①Gentner,D.(1990). The mechanisms of analogical learning. *Readings in Machine Learning*. pp.601-622.
- ②Gentner,D., Loewenstein,J., Thompson,L.(2003). Learning and transfer: A general role for analogical encoding. *Journal of Educational Psychology*. 95(2). pp.393-408.
- ③Holyoak,K.J., Thagard,P.R. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. Cambridge, MA: MIT Press.
- ④前田隆一.(1979).算数教育論—図形指導を中心として—.金子書房.
- ⑤鈴木宏昭.(1996).類似と思考.共立出版.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計10件)

- ①中川裕之、空間における直線と平面の位置関係の学習指導について—平面における直線の位置関係に基づいて考えることを通して—、日本数学教育学会第49回秋期研究大会発表集録、査読なし、2016、249—252
- ②波津久和崇、中川裕之、図形の性質を発展させる観点を見つける方法に関する一考察、日本数学教育学会第49回秋期研究大会発表集録、査読なし、2016、409—412
- ③佐々祐之、中川裕之、課題探究として証明することのカリキュラム開発—領域「数と式」のカリキュラム開発の枠組みの再検討—、日本数学教育学会第4回春期研究大会論文集、査読あり、2016、157—162
- ④中川裕之、「平行線と面積」の学習の位置づけに関する一考察—教材の作成とそれを用いた調査を通して—、日本数学教育学会第48回秋期研究大会発表集録、査読なし、2015、403—406
- ⑤茅野公穂、佐々祐之、宮崎樹夫、宮川健、中川裕之、岩永恭雄、松岡樂、課題探究として証明することのカリキュラム開発—領域「数と式」、「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化—、日本数学教育学会第

3 回春期研究大会論文集、査読あり、2015、7-12

- ⑥中川裕之、類比となる理由を探る方法に関する一考察—類似な条件におきかえて図形の性質をみつける類推に限定して—、日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会発表集録、査読なし、2014、371-374
- ⑦中川裕之、油井幸樹、中学校第三学年における授業化の過程及びその成果と課題「三平方の定理とその証明」において課題探究として証明することの授業化、日本数学教育学会誌数学教育、査読あり、第 96 巻第 9 号、2014、30-33
- ⑧中川裕之、油井幸樹、中学校図形領域における課題探究として証明することの授業化—第 3 学年の内容「三平方の定理」—、日本数学教育学会第 2 回春期研究大会論文集、査読あり、2014、107-110
- ⑨中川裕之、証明に基づく発展について—証明の着想を明らかにする教材研究を通して—、日本数学教育学会第 46 回秋期研究大会発表集録、査読なし、2013、347-350
- ⑩永田潤一郎、小松孝太郎、中川裕之、課題探究として証明することのカリキュラム開発—中学校数学科第三学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想—、日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集、査読あり、2013、25-32

〔学会発表〕（計 5 件）

- ①中川裕之、類推におけるベースに関する研究、九州数学教育学会平成 28 年度第 2 回研究発表会、2017 年 3 月、福岡教育大学（福岡県・宗像市）
- ②中川裕之、空間における直線と平面の位置関係の学習指導について、日本数学教育学会第 49 回秋期研究大会、2016 年 10 月、弘前大学（青森県・弘前市）
- ③中川裕之、「平行線と面積」の学習の位置づけに関する一考察、日本数学教育学会第 48 回秋期研究大会、2015 年 11 月、信州大学（長野県・長野市）
- ④中川裕之、類比となる理由を探る方法に関する一考察、日本数学教育学会第 47 回秋期研究大会、2014 年 11 月、熊本大学（熊本県・熊本市）
- ⑤中川裕之、証明に基づく発展について、日本数学教育学会第 46 回秋期研究大会、2013 年 11 月、宇都宮大学（栃木県・宇都宮市）

〔図書〕（計 1 件）

- ①中川裕之 他、一藝社、教科教育学シリーズ③算数・数学科教育、2015、252

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://kitchom.ed.oita-u.ac.jp/mathedu-nakagawa/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中川 裕之 (NAKAGAWA, Hiroyuki)

大分大学・教育学部・准教授

研究者番号：00450156

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし