

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：12605

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800006

研究課題名(和文) 端ウェイト加群を用いた量子アフィン代数の有限次元既約加群の研究

研究課題名(英文) Study on finite-dimensional irreducible modules over a quantum loop algebra via extremal weight modules

研究代表者

直井 克之 (NAOI, Katsuyuki)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：40647898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、量子アフィン代数と呼ばれる無限次元代数上の有限次元加群に関して、特に古典極限に着目して研究を行った。ここで古典極限とは、量子アフィン代数の加群に対しある種の特異化の操作を行うことで得られるアフィンリー代数上の加群のことである。本研究の成果として、極小アフィン化と呼ばれる既約加群のある種のクラスに対し、その古典極限の構造を詳細に調べることができた。またテンソル積と古典極限をとる操作の非可換性に関する研究も行った。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have studied the structure of finite-dimensional modules over an infinite-dimensional algebra called quantum loop algebra, by focusing their classical limits. Here classical limits of a module over a quantum loop algebra is a module over an affine Lie algebra which is obtained by taking a certain specialization. As results of this research, we have described the detailed structures of special simple modules called minimal affinizations. In addition, we have also studied the noncommutativity between the operations of taking tensor products and of taking classical limits.

研究分野：数学

キーワード：量子アフィン代数 古典極限

### 1. 研究開始当初の背景

アフィンリー代数に付随する量子群を量子アフィン代数と呼ぶ。量子アフィン代数の有限次元加群の圏は半単純ではなく、また量子アフィン代数がホップ代数であることに起因してモノイダル圏となる。このように豊富な構造を有しているとともに、団代数や叢多様体など様々な他の対象とも関連を持つことから、量子アフィン代数の有限次元加群は非常に多くの関心を集めている。しかしその一方で、既約なものに限ってもいまだその構造については分かっていないことも多い。

端ウェイト加群は、ある種の定義関係式によって定義される量子アフィン代数の無限次元加群として、柏原正樹氏により導入された。すべての有限次元既約加群に対してある端ウェイト加群からの全射が構成できるが、最も基本的な場合である基本表現を除いては、この全射について（例えば射の核の記述など）ほとんど分かっていない。この射について理解することは重要な問題であると思われる。

量子アフィン代数の加群が与えられたとき、量子パラメータ  $q$  を 1 に特殊化することでアフィンリー代数の表現が得られる。これを古典極限という。端ウェイト加群や有限次元加群の多くには古典極限を定義することが出来、また古典極限を調べることで元の加群に関する様々な情報を得ることが出来る。しかしながら元の加群が既約であっても古典極限は既約とは限らない、などの問題もあり、既約加群の場合に限っても古典極限の構造が詳細に記述されていたのは非常に特別な場合だけであった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、量子アフィン代数の有限次元加群の構造を明らかにすることである。より具体的には以下の2点に特に主眼を置いて研究を行っていく。

(1) 端ウェイト加群から有限次元加群への全射について研究を行う

端ウェイト加群は無限次元ではあるものの、構造についてはある程度よく分かっており、そのため端ウェイト加群との関係が詳細に記述できれば、有限次元加群に関する理解もより深まるはずである。特に、どのような有限次元既約加群が結晶基底を持つか、という問題は重要なものであるが、端ウェイト加群は結晶基底を持つことがすでに知られているため、本研究はこの問題の解決への大きな一歩となることが期待される。

(2) 古典極限の構造を調べることで、元の加群の構造に関する知見を得る

本研究開始時において、いくつかの特別な加群に対しては古典極限に関する結果がす

で得られており、量子アフィン代数の有限次元加群を調べるうえで古典極限が重要な役割を果たすものであることは広く知られていた。本研究では、より広範囲の有限次元既約加群に対し、その古典極限の構造を解析することを目的とする。古典極限の構造について深い理解が得られれば、元の量子アフィン代数の加群についても様々な知見が得られるはずである。また、端ウェイト加群もやはり古典極限を持つとともに、その古典極限から既約加群の古典極限へもやはり全射が構成できることが知られている。しかもこの全射は、古典極限をとる前のものに比べ遥かに扱いが容易である。そのため古典極限を詳しく調べることは、研究の目的 (1) として挙げた、端ウェイト加群と有限次元加群の関係を記述するうえでも非常に有用であると考えられる。

### 3. 研究の方法

(1) 古典極限の変形である次数付き極限と、他のアフィンリー代数の加群とを関連付けることで、その構造を理解する

量子アフィン代数の有限次元既約加群の古典極限はそれ自体を調べるより、少し変形して得られる次数付き極限を調べる方が色々な面で都合がよい。そこでこの次数付き極限について解析を行う。より具体的にはこの次数付き極限と、アフィンリー代数の最高ウェイト加群と呼ばれる無限次元加群のテンソル積の、ある部分加群として得られる拡大デマズール加群との間に射を構成することで構造を決定する。

(2) テンソル積と古典極限の非可換性に関して研究を行う。

量子アフィン代数の有限次元加群のテンソル積の古典極限は、個々の加群の古典極限のテンソル積とは必ずしも一致せず、このことが古典極限を調べるうえで大きな障害となっている。そこでこのテンソル積と古典極限をとる操作の非可換性について研究を行うことで、古典極限に関する理解を深める。

### 4. 研究成果

端ウェイト加群から有限次元加群への全射は想定以上に複雑なものであり、これを直接調べることは研究開始当初考えていたよりずっと難しい問題であった。そのため端ウェイト加群に関する研究は、想定していたほどの進展が得られなかった。その一方で、もう一つの研究目的である古典極限の構造に関する研究については、当初の想定を超える進展があった。具体的には本研究を通して、以下の結果を得た。

(1) Kirillov-Reshetikhin 加群の結晶基底のテンソル積の研究

Kirillov-Reshetikhin 加群と呼ばれる重要な量子アフィン代数の既約加群に関して、その結晶基底のテンソル積の構造と、他の量子アフィン代数加群の結晶基底の間の関係を明らかにした。

(2) 極小アフィン化の古典極限の構造の決定  
極小アフィン化は量子アフィン代数の既約加群の比較的大きいクラスである。本研究では、古典型、および  $G_2$  型の場合に、極小アフィン化の古典極限についてその構造を様々な面から明らかにした。また  $G_2$  型の場合には、これまで知られていなかった線形不等式を用いた重複度公式も同時に得ることが出来た。

(3) A 型の Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積の古典極限の研究

A 型の場合に、Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積の古典極限が、フュージョン積と呼ばれる構成法を用いて実現できることを証明した。

研究の目的においても述べたように、古典極限について調べることは端ウェイト加群と有限次元加群の関係を理解するうえでも有用なはずである。今後はこれらの結果を踏まえて、端ウェイト加群を用いた有限次元加群の構成についてもより深く研究を行っていきたいと考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

(1) Jian-Rong Li and Katsuyuki Naoi, Graded limits of minimal affinizations over the quantum loop algebra of type  $G_2$ , *Algebras and Representation Theory* (2016), DOI: 10.1007/s10468-016-9606-7, 査読有, 採録決定.

(2) 直井克之, カレント代数のフュージョン積と Schur 正値性, *RIMS 講究録* (2015), 1-8, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1977.html>, 査読無.

(3) Katsuyuki Naoi, Defining relations of fusion products and Schur positivity, *Toyama Mathematical Journal* 37 (2015), 87-106, [http://www.sci.u-toyama.ac.jp/math/tmj/archive/vol37\\_2015.html](http://www.sci.u-toyama.ac.jp/math/tmj/archive/vol37_2015.html), 査読有.

(4) Katsuyuki Naoi, Graded limits of minimal affinizations in type D, *SIGMA* 10 (2014), 20 pages, <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2014/047/>, 査読有.

(5) 直井克之, minimal affinization の Jacobi-Trudi 型指標公式について, 第 59 回代数学シンポジウム報告集, [http://www.mathsoc.jp/section/algebra/alg symp\\_past/alg symp14.html](http://www.mathsoc.jp/section/algebra/alg symp_past/alg symp14.html), 査読無.

(6) Katsuyuki Naoi, Demazure modules and graded limits of minimal affinizations, *Representation Theory* 17 (2013), 524-556, DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S1088-4165-2013-00442-9>, 査読有.

(7) Katsuyuki Naoi, Demazure crystals and tensor products of perfect Kirillov-Reshetikhin crystals with various levels, *Journal of Algebra* 374 (2013), 1-26, DOI:10.1016/j.jalgebra.2012.10.020, 査読有.

[学会発表](計10件)

(1) 直井克之, Current 代数のフュージョン積と Schur 正値性, 表現論および関連する調和解析と微分方程式, *RIMS* (京都府京都市), 2015年6月23日.

(2) Katsuyuki Naoi, Minimal affinizations and their graded limits, *Representation theory and Related Topics*, 伊良湖ビューホテル (愛知県田原市), 2015年2月18日.

(3) 直井克之, Jacobi-Trudi formula and quantum loop algebras, 組み合わせ論セミナー, 東北大学 (宮城県仙台市), 2014年12月12日.

(4) Katsuyuki Naoi, Minimal affinizations and their graded limits, *Shanghai Workshop on Representation Theory*, 上海 (中国), 2014年12月9日.

(5) Katsuyuki Naoi, Minimal affinizations and their graded limits, *Conference on Cluster Algebras and Representation Theory*, ソウル (韓国), 2014年11月4日.

(6) Katsuyuki Naoi, Graded limits of finite-dimensional modules over quantum loop algebras, *Tsukuba Workshop on Infinite Dimensional Lie Theory and Related Topics -- History and Development --*, 筑波大学 (茨城県つくば市), 2014年10月21日.

(7) 直井克之, 量子アフィン代数の有限次元既約表現とその次数付き極限, 第59回代数学シンポジウム, 東京大学 (東京都目黒区), 2014年9月11日.

(8) Katsuyuki Naoi, Graded limits of minimal affinizations, Combinatorial representation theory, モントリオール (カナダ), 2014年4月24日.

(9) 直井克之, An approach to the  $X=M$  conjecture using modules over a current algebra, 日本数学会秋季総合分科会無限可積分系セッション特別講演, 愛媛大学 (愛媛県松山市), 2013年9月24日.

(10) Katsuyuki Naoi, Finite-dimensional representations over a quantum loop algebra and their classical limits, GT Seminar, Kavli IPMU (千葉県柏市), 2013年5月9日.

〔その他〕

ホームページ: <http://web.tuat.ac.jp/~naoik/link.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

直井克之 (NAOI, Katsuyuki)

東京農工大学・大学院工学研究院・講師

研究者番号: 40647898