様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００７
研究課題名（和文）ゼータ関数の加法的分解と正値性

研究課題名（英文）Additive decomposition and positivity for zeta functions

研究代表者
鈴木　正俊（Suzuki, Masatoshi）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：３０５３４０５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：リーマンのゼータ関数やディリクレのＬ関数を典型例とするゼータ関数と呼ばれる特殊関数の一群は，数論における主要な研究対象の一つである．本研究課題では，数論的に重要な意味をもつゼータ関数の零点の分布を，ある種の線形常微分方程式系の理論と関連付ける研究などを行った．その成果の一つとして，数論と関数解析学を結びつける新たな理論的枠組みが得られた．また，ある特別なゼータ関数の零点の虚部の分布について新たな発見が得られた．

研究成果の概要（英文）：A group of special functions called zeta functions is one of the major research areas in number theory. The Riemann zeta function and Dirichlet L functions are typical examples of zeta functions. In this research project, we have studied the distributions of the zeros of the zeta functions, which are important in number theory, with the theory of certain systems of ordinary linear differential equations. As one of the achievements, a new theoretical framework relating number theory with function analysis was obtained. In addition, a new discovery was made about the distribution of the imaginary parts of the zeros of certain special zeta functions.

研究分野：解析数論

キーワード：ゼータ関数　零点分布　リーマン予想　正準系　スペクトル逆問題

１．研究開始当初の背景

ゼータ関数とは，リーマンのゼータ関数を起源とし，様々な観点からその類似を辿って定義された特殊関数たちの通称であり，幾つかの標準的な解析的性質を満たす，或いは満たすと予想されている．多くのゼータ関数は特定のデータのディリクレ級数型の生成関数として定義され，そのデータの深い性質を関数の解析的性質として表現する．現代の数論においては，数論に由来するデータを用いて定義される数論的ゼータ関数の研究が中心的な課題の一つとなっている．

数論的ゼータ関数についてまず問題となるのは，全平面への解析接続と関数等式である．通常の数論的ゼータ関数は，アプリオリには，複素平面内のある右半平面上でしか定義されないからである．次いで問題となるのが，解析接続されたゼータ関数の特殊値や極・零点の分布である．特に零点の分布は最も深い数論的性質に関係しており，それを反映した特別な分布に従うと予想されている．これにはリーマン予想に代表される零点の実部に関するものと，モンゴメリー・オドリズコの相関予想や，ゼータ関数とランダム行列理論との関連に代表される零点の虚部に関するものが挙げられる．

ゼータ関数の零点分布について研究する際，「**正値性**」という観点がしばしば重要な役割を果たしてきた．

20 世紀中頃，A. ヴェイユは有限体上の一変数代数関数体のゼータ関数（局所的なゼータ関数の一種）が，リーマン予想を含む重要な解析的性質を全て満たすことを証明した．彼の証明のポイントは，ゼータ関数の解析的性質を代数幾何学的な事実と結びつけることであった．特にリーマン予想は対応の跡の正値性に帰着される．ヴェイユはこの考えをさらに発展させて，代数体のゼータ関数（大域的なゼータ関数の一種）に対して現在ヴェイユ分布と呼ばれている分布（超関数）を定義し，リーマン予想をヴェイユ分布の正値性として定式化した．

このような幾何学的な背景を持つ正値性の観点からのアプローチは，代数体のゼータ関数のリーマン予想の解明に対する有力な方針の一つとして多くの研究者たちに試みられ，全世紀末から今世紀初頭にかけての A. コンヌ等の大域体のゼータ関数に関する一連の研究などにも引き継がれている．

一方， X.‐J. リーは，ヴェイユの証明を参考にして，代数体のゼータ関数に対して現在リー係数と呼ばれている量（数列）を導入し，リーマン予想をリー係数の正値性として定式化する事に成功した．この結果は，E. ボンビエリ，J. C. ラガリアス により，ヴェイユ分布の正値性のある種の離散化として再解釈された上，ラガリアス等により，一般線形群の大域的な保型 L 関数に対して拡張され研究が続けられている．

２．研究の目的

前項で述べたように，リーマン予想を視野に入れたゼータ関数の零点分布の研究においては，零点の実部の分布を適切な量の正値性に帰着させる理論を確立することが長年の課題の一つであった．とはいえ，幾何学的な解釈が可能であるという利点をもつヴェイユ分布に関連した理論も，未だ完成したものではなく，その他の従来のアプローチでは，零点分布の性質が何らかの量の正値性として定式化されたとしても，その正値性の根拠は不明確なことが多いという状況であった．

こういった状況を踏まえて，本研究では，例えばゼータ関数 $Z(s)$で，実軸上で実数値をとり，関数等式

$$Z(s) = Z(1 - s) \qquad (*)$$

を満たすようなものに対して，「**加法的分解**」

$$Z(s) = X(s) + X(1 - s) \qquad (※)$$

を考えることから始め，理想的な加法的分解を与えるような $X(s)$の選択に対する考察を通じて，ゼータ関数 $Z(s)$の零点分布の性質を，従来とは全く異なる新たな量の正値性により特徴付けることを目的の一つとしていた．

さらに，そのような新たな量の正値性について，ヴェイユ分布やリー係数の正値性とは異なる新たな理論的解釈を与えることも目標としていた．

３．研究の方法

関数等式（＊）をもつゼータ関数 $Z(s)$に対して，加法的分解（※）を与えるような関数 $X(s)$ の選択は無数にあり得る．その中から $Z(s)$の零点分布の研究に有用な $X(s)$を選ぶため，本研究では次の２つの方法を用いた：

（１）正準系の理論を用いる方法，

（２）代数群の対称性を用いる方法．

（１）もしゼータ関数 $Z(s)$がリーマン予想の類似を満たすならば，加法的分解（※）における関数 $X(s)$として，複素変数ｓの実部が２分の１より大きなとき，不等式

$$|X(1 - s)| < |X(s)| \qquad (※※)$$

を満たすような整関数がとれる．１９６０年代の L. ド・ブランジュの結果によれば，このような整関数には正準系と呼ばれる線形常微分方程式系が対応する．正準系は，ハミルトニアンと呼ばれる実対称行列値関数によって定まる標準的な微分方程式系の一種である．このようにして，$Z(s)$ のリーマン

予想は，上記のような整関数 X(s) の存在を経由して，ある正準系のハミルトニアンの正定値に帰着される．したがって，Z(s)に対応すべき正準系のハミルトニアンを，リーマン予想を仮定せずに構成できれば， それから X(s) を経由して，リーマン予想を始めとする Z(s) の零点の深い性質を導くことができると期待される．

しかしながら，ド・ブランジュの理論は不等式（※※）を満たすような整関数 X(s)に対応するハミルトニアンの具体的な形については何も情報を与えてくれないので，それを知るには新たな方法を開発する必要がある．本研究では，代表者が 2012 年に京都大学数理解析研究所講究録別冊 B34 で発表した方法をベースにして，幾つかのゼータ関数についてハミルトニアンの具体的な構成を試みた．

（２）一般的なゼータ関数に対する加法的分解（※）の研究を進める方法が（１）であったのに対し，こちらはより特殊なクラスのゼータ関数に関する方法である．

古典的なリーマンのゼータ関数のひとつの一般化として，L．ウェンは(G,P)のゼータ関数と呼ばれる，簡約代数群 G と，その各極大放物部分群 P に対して定義されるゼータ関数を定義した．注目すべき事実として，いくつかの特別な(G,P)のゼータ関数に対してはリーマン予想の類似が証明されていた．本研究ではそのような結果の一般化を目標に，(G,P)のゼータ関数が簡約代数群に由来する抱負な対称性（ワイル群による対称性）を持つことに着目し，その対称性を効果的に用いることによって得られた加法的分解（※）を通じて，(G,P)のゼータ関数の零点について調べることを行った．

４．研究成果

（１）に関する成果は，
①局所的ゼータ関数に関するもの，
②大域的ゼータ関数に関するもの，
の２つに大別される．①は雑誌論文③，④，および学会発表①，⑦，⑧，⑩で発表されたほか，プレプリントサーバ arXiv.org におけるプレプリント
https://arxiv.org/abs/1308.0228
で公表されている．また，②は学会発表③，⑤，⑥，⑨で発表されたほか，プレプリント
https://arxiv.org/abs/1606.05726
で公表されている．

①に関する成果として，リーマン予想の類似を満たすような局所的ゼータ関数に対応すべき正準系のハミルトニアンを，リーマン予想の類似を仮定する事なく，完全に明示的な形で決定する表示式を得た．この表示式により，与えられた局所的ゼータ関数のリーマン予想の類似は，具体的に計算可能な有限個の数値の正値性に帰着される．これは本研究の目的の一つを局所的ゼータ関数に対して達成した結果となっている．

いっぽう，②に関する結果は①の場合と異なり，リーマン予想の類似を満たすような大域的ゼータ関数 Z(s)そのものに対するものではない．これは大域的ゼータ関数について①と同じ方針で結果を得ようとするときに生ずる技術的な障害による．この障害を避けるため，本研究では，１つの実数と１つの整数でパラメータ付けられた Z(s)のある変形族を考え，その族に属するようなゼータ関数に対応すべき正準系のハミルトニアンについて研究した．そして，そのようなハミルトニアンを，Z(s)に対するリーマン予想の類似を仮定する事なく，Z(s)から明示的に定まる積分作用素のフルードホルム行列式によって具体的に書き下す表示式を与えた．この結果は局所的ゼータ関数に関する結果の類似になっており，本研究の目的の一つを大域的ゼータ関数に対して達成した結果である．

①，②で得られたハミルトニアンの表示式は，一般には解くことが困難な関数解析学におけるある種のスペクトル逆問題に対する明示的な解を与えており，ゼータ関数論や数論のみならず，関数解析学的にも意義のある結果と考えられる．

（２）に関する成果は雑誌論文①，②，学会発表②，④で発表された．

雑誌論文②は H．キ，小森靖との共同研究である．そこで我々は，有理数体上定義された一般の半単純代数群 G とその極大放物部分群 P について，我々が体積仮説と名付けた幾何学的に自然な仮定の下で， (G,P)のゼータ関数が弱いリーマン予想を満たす事を証明した．ここで弱いリーマン予想とは，ゼータ関数の零点が，有限個の例外を除けば関数等式の中心線上にある事を指す．この結果は，体積仮説は証明されている場合もあること，リーマン予想が部分的にでも証明されている大域的なゼータ関数の例は一つも知られていない事と，(G,P)のゼータ関数がリーマンのゼータ関数の自然な一般化である事など踏まえれば，ゼータ関数の零点分布研究に画期的な進展をもたらしたものと言える．

雑誌論文②が弱いリーマン予想という零点の実部に関する成果であったのに対し，雑誌論文①は零点の虚部に関する成果である．一般に(G,P)のゼータ関数の零点の虚部は，リーマンのゼータ関数などの古典的なゼータ関数とは全く異なる分布をもつ．これは(G,P)のゼータ関数が古典的なゼータ関数の自然な一般化の一つであることを考えると，若干奇異な状況に思われる．代表者はこの差異について研究を重ね，特別な(G,P)のゼータ関数のゼータ関数である階数２のゼータ関数と，その連続変形族の零点について，正規化された虚部の間隔分布の第二主要項が

古典的なゼータ関数の虚部の間隔分布に似た振る舞いをすることを発見した．さらに，そのような第二主要項の振る舞いが，近年伊原康隆氏・松本耕二氏がゼータ関数の値分布論においてM関数と呼んで研究した関数により記述される事を示した．これは全く新しい観察であり，今後のゼータ関数の零点分布の研究に新たな話題を提供するものと考えられる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① M. Suzuki, Nearest neighbor spacing distributions for the zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines, Acta Arithmetica **170** (2015), no. 1, 47‐65, 査読有,
DOI: 10.4064/aa170-1-4

② H. Ki, Y. Komori, M. Suzuki, On the zeros of Weng zeta functions for Chevalley groups, Manuscripta Mathematica **148** (2015), no. 1‐2, 119‐176, 査読有,
DOI: 10.1007/s00229-015-0736-8

③ 鈴木正俊, An inverse problem for a class of canonical systems, 数理研講究録「解析的整数論‐超越関数の数論的性質とその応用」, No.1898 (2014), 140－145, 査読無,
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1898-13.pdf

④ 鈴木正俊, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 数理研講究録「解析数論‐近似と漸近的手法を通して見た数論」, No.1874 (2014), 125-134, 査読無,
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1874-14.pdf

〔学会発表〕（計１０件）

① 鈴木正俊, Canonical systems arising from Dirichlet polynomials, 数理研研究集会「解析的整数論の諸問題と展望」, 2016 年 11 月 1 日, 京都大学数理解析研究所

② M. Suzuki, On the distributions for the zeros of the real and imaginary parts of the Riemann xi-function on vertical lines, The Sixth International Conference Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, 2016 年 9 月 13 日, Vilnius University Conference and Seminar centre Romuva, Lithuania

③ M. Suzuki, Hamiltonian systems arising from L-functions in the Selberg class, Zeta functions of several variables and applications, 2015 年 11 月 10 日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

④ 鈴木正俊, Nearest neighbor spacing distributions for zeros of the real part of the Riemann-function lying on vertical lines, 数理研研究集会「解析的整数論－ 数論的対象の分布と近似」, 2014 年 10 月 29 日, 京都大学数理解析研究所

⑤ M. Suzuki, Translation invariant subspaces and GRH for zeta functions, Symmetries and correspondences in number theory, geometry, algebra, physics ; intra-disciplinary trends, 2014 年 7 月 7 日, University of Oxford, United Kingdom

⑥ M. Suzuki, Analytic aspects of two-dimensional zeta integrals via mean-periodicity , Symmetries and Correspondences: Higher Structures in Number Theory, 2014 年 7 月 4 日, University of Nottingham, United Kingdom

⑦ 鈴木正俊, ある種の正準系の逆問題とその応用, 数理研研究集会「代数的整数論とその周辺」, 2013 年 12 月 12 日, 京都大学数理解析研究所

⑧ 鈴木正俊, An inverse problem for a class of canonical systems, 数理研研究集会「解析的整数論‐超越関数の数論的性質とその応用」, 2013 年 11 月 7 日, 京都大学数理解析研究所

⑨ M. Suzuki, Zeta functions as a variant of the cosine function, International Conference on Number Theory, 2013 年 9 月 10 日, Siauliai University, Lithuania

⑩ M. Suzuki, An inverse problem for a class of canonical systems and its applications; Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory, 2013 年 9 月 5 日, Vilnius University Conference and Seminar centre Romuva, Lithuania

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ等
http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
鈴木　正俊（SUZUKI, Masatoshi）
東京工業大学・理学院・准教授
研究者番号：３０５３４０５２

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし