

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 4 月 25 日現在

機関番号：13902

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800011

研究課題名(和文) 球面有限集合の配置理論から見る代数的組合せ論

研究課題名(英文) Algebraic combinatorics from the viewpoint of finite sets on a sphere

研究代表者

野崎 寛 (Nozaki, Hiroshi)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：80632778

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目標のひとつは、球面の次元と、球面上の有限集合の濃度を固定した時に、最小距離を最大にする配置は何かという、最適球面コードの問題に進展を与えることであった。球面有限集合において強力な手法として知られていた線形計画限界(Delsarte's method)の、正則グラフでの「双対化」に成功した。正則グラフのスペクトル(隣接行列の固有値)には、球面上の有限集合の距離と、ある意味で双対な関係がある。球面コード(球面上の有限集合)と正則グラフの間で、同様の結果が期待でき、互いに影響し合いながら発展することが期待できる。

研究成果の概要(英文)：We would like to obtain progress of optimal spherical codes in this research project. One of major problems of optimal spherical codes is to find a spherical finite set which has maximum minimum-distance between distinct points among the equal-sized spherical sets. The linear programming bound (Delsarte's method) is a powerful tool to obtain a bound for the size of spherical sets for given distances. For regular graphs, we gave the ``dual'' version of the linear programming bound. The spectrum (the eigenvalues of the adjacency matrix) of a regular graph has some dual relationship to the distances on a finite spherical set. We can expect similar results between spherical codes (spherical finite sets) and regular graphs, and developments of both objects from each other.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：デルサルトル理論 球面集合 正則グラフ グラフの固有値 最適球面コード

### 1. 研究開始当初の背景

代数的組合せ論において、ある意味で“良い”とされる球面上の有限集合には、群論的な背景を持つアソシエーションスキームと呼ばれる代数的構造が潜んでいる。配置の良さと、付随する代数的構造の良さは双方向的なものがあり、良い配置の構成、特徴づけを行うことで、その代数的構造の良さを配置理論の言葉で表現することが出来る。本研究では、必ずしも代数的構造が付随しない、代数的組合せ論における重要対象である、接吻数配置、距離集合配置、球面デザイン配置等の構成、分類、特徴づけを行うことで、新たな代数的構造の発見や、特徴づけを行う。新たに見出された代数的構造からは、様々な数学の対象への応用が期待できる。

球面上の“良い”有限集合として、接吻数を与える配置、ある意味で球面を近似する集合(デザイン)、2点間の距離の関係に注目した集合(コード)などが知られる。球面  $t$  デザインと、コード的な概念である  $s$  距離集合のパラメータ  $s, t$  の間には、 $t < 2s + 1$  という関係があるが、 $t$  が  $2s$  に近いとき、アソシエーションスキームなどの非常に対称性の強い性質を持つことが知られている [Delsarte, Goethals, and Seidel (1977)]。

### 2. 研究の目的

最適コードに対して距離の個数の上界を与えることで、距離集合の議論に落とし込み、 $D_4$  ルート系が最適コード(頂点数を固定したときに、最小距離が最大となる配置)であること、そして接吻数として一意的であることを証明する。

### 3. 研究の方法

まず、 $s$  彩色グラフの  $s$  距離集合としての埋め込み理論を構築することを目的とする。 $2$  距離集合に対しては Einhorn and Schoenberg(1966)、Roy(2010)などの結果がすでに知られている。LRS 比 [Nozaki(2011)] が、 $s$  彩色グラフの固有値となる事実を応用し、その関係行列の性質を特徴付ける。この理論を応用し、グラフの球面コードとしての埋め込み理論の構築を行う。 $|X|=24, d=4$  と固定し、最適コードの候補となるグラフの関係行列の特徴づけを行い、内積の個数  $s$  を上から評価する。内積の種類を決定し、 $D_4$  ルート系が最適コードを与える唯一の配置であることを示す。さらに  $D_4$  ルート系が  $4$  次元接吻数を与える配置として一意的であることを示す。

### 4. 研究成果

実際には、 $D_4$  ルート系が  $4$  次元接吻数を与える配置として一意的であることは、期間内に示すことは出来なかった。しかしながら、証明を試みる中で、当初予期していなかった、本研究とも関連が深く、それ自身意義のある代数的組合せ論の問題に進展を与えること

が出来た。8本の論文が、組合せ論の査読付き国際誌へ受理された。いくつかの論文の概要を、本研究との関連と共に紹介したい。

ユークリッド空間上の有限集合が、異なる二点間のユークリッド距離が全て整数であるとき、integral point set と呼ばれる。Integral point set には、次元と有限集合のサイズを固定したときに、最大距離を最小化したいという問題意識がある。単独で執筆した「Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets」[雑誌論文]では、その最大距離の既存の下界を一般に改善することに成功した。ここでの証明の方針は、集合の隣接関係から得られる行列の固有値を解析することであった。本研究の最初の課題として、 $s$  種類の隣接関係を持つグラフ構造の、 $s$  距離集合(異なる2点間のユークリッド距離が  $s$  種類であるユークリッド空間上の有限集合)としての、ユークリッド空間への埋め込み理論の構築を挙げた。そこでは、隣接関係を表す行列たちの固有空間の解析が重要である。[雑誌論文]では、サイズの大きい  $s$  距離集合に対して、その隣接行列が、ある特別な重複度の大きい整数固有値を持つことが示されており、それが大きなブレイクスルーとなっていた。この固有値の議論から、一般のグラフ構造の、 $s$  距離集合としての埋め込み理論を発展させたい。

本研究課題における大きな目標の一つが、球面の次元と、球面上の有限集合の頂点数を固定したときに、互いに異なる2点間の距離の最小値を最大にする配置を決定する問題(最適球面コードの問題)に進展を与えることであった。正則グラフのスペクトル(隣接行列の固有値)には、球面上の有限集合の距離と、ある意味で「双対」の関係がある。球面コード(球面上の有限集合)と正則グラフの間で同様の結果が期待でき、互いに影響し合いながら発展することが期待できる。

「Linear programming bounds for regular graphs」[雑誌論文]では、正則グラフの頂点数に関する上界を、正則グラフの異なる固有値の情報から、線形計画法に基づく新たな手法で示した(線形計画限界)。すでに球面上の線形計画限界は知られており、その有効性が多くの場合に確認されている。グラフの線形計画限界を用いて、スペクトラルギャップ(最大固有値と2番目に大きい固有値の差)が最大となるグラフを、無限系列を含む格好で決定した。正則グラフの線形計画限界が示されたことで、正則グラフと球面コードの類似性が、より明確化され、正則グラフで知られている有効な結果の球面コードでの類似物を模索することで、球面コードの本質的な進展が期待される。

複素球面上の有限集合で、異なる2点間の複素内積の値が2種類に限るものを 2-code

と呼ぶ。須田庄氏（愛知教育大学）との共同研究によって、複素球面の次元を固定した時に、元の個数が最大もしくは最大に近い 2-code の分類、特徴付けを行った。実際に、最大な 2-code は doubly regular tournament と skew Hadamard matrix から構成される。関連の結果をまとめた論文「Complex spherical codes with two inner products」が、組合せ論専門誌「European Journal of Combinatorics」へ掲載された[雑誌論文]。n 次元ユークリッド空間において、 $-1, 0, 1$  の成分の個数がそれぞれ  $1, n-3, 2$  であるベクトル全体からなる集合を  $L$  とする。 $L$  の部分集合で、 $L$  の最大距離を持たない最大な部分集合  $X$  の分類を、安達沙織（愛知教育大学大学院生）との共同研究により得た。この結果の応用として、ジョンソンスキーム  $J(9, 4)$  の埋め込みを含む最大な 4 距離集合の分類を得た。これらの結果をまとめた論文「On the largest subsets avoiding the diameter of  $(0, \pm 1)$ -vectors」は、組合せ論専門誌「Ars Math. Contemp.」への掲載が決まっている[雑誌論文]。

以上 2 点の論文[雑誌論文]は、ユークリッド空間または複素球面上の特別な有限集合の、アソシエーションスキームなどの代数的構造との関係性を明らかにするものであり、本研究の重要な成果であるといえる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Saori Adachi and Hiroshi Nozaki, On the largest subsets avoiding the diameter of  $(0, \pm 1)$ -vectors, *Ars Math. Contemp.*, 2016, 掲載確定, 査読有り。

H. Nozaki, Polynomial properties on large symmetric association schemes, *Annals of Combinatorics*, 2016, 掲載確定, 査読有り,  
<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00026-016-0300-6>

H. Nozaki and S. Suda, Complex spherical codes with two inner products, *European Journal of Combinatorics*, 51, 2016, 511–518, 査読有り,  
DOI: 10.1016/j.ejc.2015.07.016

H. Nozaki, Linear programming bounds for regular graphs, *Graphs and Combinatorics*, 31, 2015, 1973–1984, 査読有り,  
DOI: 10.1007/s00373-015-1613-7.

H. Nozaki and S. Suda, Weighing matrices and spherical codes, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 42, 2015, 283–291, 査読有り,  
DOI: 10.1007/s10801-015-0581-6

H. Kurihara and H. Nozaki, A spectral equivalent condition of the P-polynomial property for association schemes, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 21, 2014, 8 pages, 査読有り,  
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v21i3p1>

野崎寛, 有向グラフの複素球面埋め込みに関するアルゴリズム, 第 10 回「代数学と計算」研究集会 (AC2013) 報告集, 首都大学東京, 2014, 43–49, 査読なし,  
[http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/ac/2013/proceedings/ac2013\\_proceedings.pdf](http://tnt.math.se.tmu.ac.jp/ac/2013/proceedings/ac2013_proceedings.pdf)

H. Nozaki and M. Shinohara, 距離集合における点の配置問題とグラフ, RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」, 数理解析研究所講究録 1844, 京都大学, 39--49, 2013, 査読無し,  
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009605718>

H. Nozaki, Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets, *Australas. J. Combin.*, 56, 139--143, 2013, 査読有り,  
[http://ajc.maths.uq.edu.au/?page=get\\_volumes&volume=56](http://ajc.maths.uq.edu.au/?page=get_volumes&volume=56)

H. Nozaki and M. Sawa, Remarks on Hilbert identities, isometric embeddings, and invariant cubature, *St. Petersburg Math. J.*, 25, 139--181, 2013, 査読有り,  
[http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=aa&paperid=1348&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=aa&paperid=1348&option_lang=eng)

H. Nozaki, 有向グラフと複素球面上のコード, 第 29 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 弘前大学, 30--36, 2013, 査読無し,  
<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~hnozaki/proceeding/2012/hirosaki.pdf>

[学会発表](計 20 件)

野崎寛, On the largest subsets avoiding the diameter of  $(0, 1, -1)$ -vectors, RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 京都大学(京都府・京都市), 2016 年 1 月 5 日。

野崎寛, On the largest subsets avoiding the diameter of  $(0, \pm 1)$ -vectors, 第 11 回「代数学と計算」研究集会 (AC2015), 首都大学東京 (東京都・八王子市), 2015 年 12 月 15 日.

野崎寛, Maximizing the order of a regular graph of given valency and second eigenvalue, 日本数学会・2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学 (京都府・京都市), 2015 年 9 月 13 日.

H. Nozaki, Large regular graphs of given valency and second eigenvalue, 8th Slovenian Conference on Graph Theory, Kranjska Gora (スロベニア), 2015 年 6 月 23 日.

H. Nozaki, Dual relationship of regular graphs and spherical codes, Seventh Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference, Schlitterbahn South Padre Island Beach Resort (アメリカ), 2015 年 4 月 9 日.

野崎寛, 大きなスペクトラルギャップを持つ正則グラフについて, スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第 3 回研究集会, 広島工業大学 (広島県・広島市), 2015 年 3 月 15 日.

H. Nozaki, Large regular graphs for given second-largest eigenvalue Japan-Korea workshop on algebra and combinatorics, Kyushu Institute of Technology (福岡県・北九州市), 2015 年 1 月 29 日.

野崎寛, 固有値を用いたグラフの線形計画限界, 熊本組合せ論研究集会-代数的デザイン論とその周辺-, 熊本大学 (熊本県・熊本市), 2015 年 1 月 9 日.

H. Nozaki, Linear programming bounds for regular graphs, Algebraic Combinatorics Workshop, University of Science and Technology of China (中国), 2014 年 11 月 29 日.

野崎寛, 球面有限集合と正則グラフに対する線形計画限界の類似, 談話会, 名古屋大学 (愛知県・名古屋市), 2014 年 11 月 12 日.

野崎寛, 正則グラフに対する線形計画限

界について, 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学 (広島県・広島市), 2014 年 9 月 25 日.

野崎寛, An introduction to algebraic combinatorics on a sphere, 代数的組合せ論「夏の学校 2014」, 秋保リゾート ホテルクレセント (宮城県・仙台市), 2014 年 6 月 17 日.

H. Nozaki, Dual properties on polynomial association schemes, Eighth Shanghai Conference on Combinatorics, Shanghai Jiao Tong University (中国), 2014 年 5 月 25 日.

H. Nozaki, Regular graphs, spherical sets, and polynomial association schemes, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics (Plenary Speaker), Nihon University (東京都・千代田区), 2014 年 5 月 21 日.

H. Nozaki, A dual concept of spherical  $s$ -distance sets, Sixth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference, Schlitterbahn South Padre Island Beach Resort (アメリカ), 2014 年 4 月 10 日.

野崎寛, 多項式スキームの双対性について, 組合せ論セミナー, 東北大学大学院情報科学研究科 (宮城県・仙台市), 2014 年 1 月 16 日.

野崎寛, 特別講演「有向グラフの複素球面埋め込みに関するアルゴリズム」, 第 10 回「代数学と計算」研究集会 (AC2013), 首都大学東京 (東京都・八王子市), 2013 年 12 月 18 日.

野崎寛, 有向グラフの複素球面埋め込みに関するアルゴリズム, 東海幾何・組合せ論セミナー, 愛知教育大学 (愛知県・刈谷市), 2013 年 12 月 15 日.

野崎寛, グラフ構造から得られる  $s$ -距離集合について, 大阪組合せ論セミナー, 大阪市立大学梅田サテライト・文化交流センター (大阪府・大阪市), 2013 年 5 月 7 日.

H. Nozaki, Eigenvalues of large distance sets and its applications, Fifth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference, South Padre

Island (アメリカ), 2013年4月19日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://hnozaki.jimdo.com/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野崎 寛 (NOZAKI, Hiroshi)

愛知教育大学・教育学部・専任講師

研究者番号: 80632778

### (2) 研究分担者

無し

### (3) 連携研究者

無し