様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ (共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年 ６ 月 ６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８０００１４

研究課題名（和文）モジュライ理論と量子代数

研究課題名（英文）Moduli theory and quantum algebras

研究代表者
柳田　伸太郎（Yanagida, Shintaro）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：５０６４５４７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：モジュライ空間の量子対称性、特にAGT予想について研究を進めた。またAGT予想のK理論ないし差分類似に関連して、量子トロイダル代数と変形W代数の構造論・表現論を研究した。具体的には変形Virasoro代数のWhittakerベクトルの明示公式、N=1超共形代数の特異ベクトルの明示公式、Zamolodchikov型漸化式を証明した。また量子トロイダル代数に関連して、Ringel-Hall代数のDrinfeldダブルと2周期複体のBridgeland-Hall代数の同値性を示した。

研究成果の概要（英文）：We studied the quantum symmetry of the moduli spaces, focusing on the AGT relations and its K-theoretic/difference analogue.
We achieved some explicit formulas on the quantum algebras such as quantum toroidal algebras and deformed W-algebras.
We also studied the Ringel-Hall algebra, its Drinfeld double and Bridgeland-Hall algebra of two-periodic complexes, particularly focusing on the case of coherent sheaves over a curve.

研究分野：表現論、代数幾何学

キーワード：量子代数　モジュライ空間

１．研究開始当初の背景

代数曲面上の枠付き安定層のモジュライ空間や射影直線から旗多様体への写像のモジュライ空間のコンパクト化は、その同変コホモロジー群や同変 K 群に W 代数や量子アフィン環等の無限次元代数が作用するという意味で、大きな対称性を持つ。
本研究の大まかな目標は、今まで個別になされてきたモジュライ空間の対称性の研究を、Ringel-Hall 代数、量子 Drinfeld-Sokolov 還元や量子群の構成法といった、量子代数の手法に基づく組織的な研究に昇華させることにある。

２．研究の目的

(1) まずモジュライ空間と無限次元代数との関わりについて箇条書きで述べる。
① 中島(1997)により、平面上の点の Hilbert 概型のホモロジー群の直和に無限次元 Heisenberg 代数が作用することが示された。
② 前項で同変ホモロジーの代りに同変 K 群を考えると、gl(1)量子トロイダル代数(Ding-Iohara-Miki 代数とも呼ばれる)が作用する事が Feigin-Tsymbaliuk(2011) により示された。
③ 中島(2001)による、箙多様体の同変 K 群への量子ループ代数の作用の構成。
④ 基点付き射影曲線から一般線型群の旗多様体への写像のモジュライ空間のコンパクト化として、局所 Laumon 空間がある。Braverman-Finkelberg(2005) によりその同変K群にもA型量子ループ代数が作用する。
⑤ 超弦理論における AGT 予想(Alday-Gaiotto-Tachikawa, 2010)。元来は射影曲面上の階数 2 の枠付き連接層（インスタントン）のモジュライ空間から定義される Nekrasov 分配函数と、Virasoro 代数の共形ブロックが一致するという予想であった。予想の退化版は柳田(2011)により証明が完成した。

(2) 前項⑤の AGT 予想について、その後の展開を本研究の目的と合わせて説明する。
⓪ 元来の AGT 予想は 4 次元 N=1 超対称性ゲージ理論と 2 次元共形場理論の等価性という物理の予想であった。
① 退化版 AGT 対応の最も単純な一般化、すなわち階数 r の場合、モジュライ空間の同変コホモロジーに Lie 環 sl(r)とその主冪零元に対応した W 代数が作用する。この主張は gl(1)量子トロイダル代数の退化を用いて Schiffmann-Vasserot(2013) により証明された。また Maulik-Okounkov による、箙多様体の stable envelope からW代数のスクリーニング作用素を幾何学的に構成する方法(2013)もある。
② さらに構造群を simply raced な単純 Lie 群とした場合。インスタントンのモジュライ空間の交叉ホモロジー群に W 代数が作用する。この W 代数は構造群に付随する Lie 環とその主冪零元に対応するものである。この主張は Braverman-Finkelberg-中島(2014)により証明されている。その手法は①の Maulik-Okounkov の方法を拡張して特異なインスタントン・モジュライ空間に適用するというものである。
③ K 理論類似。元来のベクトル束上のインスタントンの場合は、モジュライ空間はGiesekerモジュライと呼ばれる半安定性層のモジュライ空間とも思えるので、特に非特異であり、同変 K 群を考えることができる。この場合作用する代数はA型変形W代数のはずである(粟田・山田の予想、2010)。

(3) 本研究では K 理論的 AGT 予想とそれに纏わる量子代数の表現論、およびその代数幾何学的構成を研究対象とする。
具体的に以下の項目を研究する。
① K 理論的 AGT 予想にまつわる変形 W 代数の性質。特に Whittaker ベクトルの性質。
② 量子トロイダル代数の性質。特に Ringel-Hall 代数としての性質。
③ K 理論的 AGT 予想の証明
④ K 理論的 AGT 予想の応用、特にパラメータの特殊化。
⑤ 共形場理論の差分変形、および量子 Drinfeld-Sokolov 還元の変形。

３．研究の方法

「２．研究の目的(3)」で述べた各項目にそって説明する。
(1) コホモロジー版の AGT 予想においてモジュライ空間のホモロジー群が W 代数の表現となるが、モジュライ空間の基本類は W 代数の Whittaker ベクトルになるべし、というのが退化版 AGT 予想の主張である。Whittaker ベクトルは Lie 環の場合に Kostant によって 70 年代に導入され、W 代数の類似を定義することも簡単だが、実際に研究が始まったのは 2009 年以降である。柳田(2011)により Virasoro 代数の Whittaker ベクトルが Jack 対称函数を用いて明示的に表示されている。K 理論版の予想がある（粟田・

山田、2010）が本研究が始まった時点では未解決である。その証明を与えたい。
コホモロジー版では Whittaker ベクトルの漸化式が表現論的に構成され、あとは明示公式がそれを満たすことを計算で確認するというものであった。表現論的な構成というのは、Calogero-Sutherland ハミルトニアンの無限変数版を Fock 表現上の作用素と思うと、Virasoro 代数の Feigin-Fuchs による Fock 表現を用いて明示化できるという事実を用いる。
K 理論類似を考えると、変形 Virasoro 代数の Fock 表現と Macdonald 差分作用素の無限変数版との関係を用いることができると考えられる。

(2) K 理論的 AGT 予想で中心になる量子代数は gl(1)量子トロイダル代数である。まずその構造論と表現論を研究する。
この量子代数は位相的 Hopf 代数であり、また Fock 表現とよばれる基本的な表現も持つ。Fock 表現は階数 1 のインスタントン・モジュライ、即ち平面上の点の Hilbert 概型、の同変 K 群 F への作用と同型である。階数 r のモジュライの同変 K 群は F の r 回テンソル積と線形空間としては同型なので、あとは余積構造を調べれば代数の作用が分かる事になる。
余積構造の研究のために、量子トロイダル代数の様々な実現・表現の関係を整理する必要がある。現在以下の 4 つの構成が知られている
① Macdonald 差分作用素の自由場表示
② Hilbert 概型の同変 K 群上の幾何学的な構成
③ 半無限ウェッジ積を用いたもの
④ 楕円曲線上の連接層の Ringel-Hall 代数の Drinfeld ダブル

上述の Hopf 代数の構造が分かりやすいのは④の Hall 代数を用いるアプローチである。以下これについて詳しく説明する。
任意の Abel 圏に対して Ext の数を構造定数に用いることで Hall 代数と呼ばれる結合代数が得られる。大域次元 1 の場合はこれが双代数になり、特に Ringel-Hall 代数と呼ばれる。この双代数は比較的緩やかな条件のもと Hopf 代数の構造をもつ。特に Abel 圏として（非特異射影）曲線上の連接層のなす圏をとることができる。
2 つの Hopf 代数に Hopf 形式と呼ばれる双線形形式が与えられると、Drinfeld double と呼ばれる新しい Hopf 代数を構成することができる。この構成を上記の Ringel-Hall 代数とそれ自身の上の Euler 形式に適用することができる。得られる Hopf 代数を「曲線上の連接層の Hall 代数の Drinfeld ダブル」と呼ぶ。
このように構成された Hall 代数は幾何学的な背景を持つため、その構造の研究、特に自己同型の研究に役立つと期待される。

(3) コホモロジー版の AGT 予想の証明にならって K 理論版の証明を与えたい。2 つの手法が考えられる。
① 柳田(2011)による漸化式を用いた照明。つまり、Nekrasov 分配函数と Whittaker ベクトルのノルムが同じ漸化式で特徴づけられることを用いる。
② K 理論的 stable envelope を用いて変形 W 代数のスクリーニング作用素を幾何学的に構成する。

(4) K 理論的 AGT 予想には 2 つのパラメータ q と t が付随する。幾何学的には複素アファイン平面上に作用する 2 次元トーラスの指標であり、表現論的には変形 W 代数のパラメータである。$t=q^\beta$ で $q\to1$ の極限をとるとコホモロジー版のパラメータ β に帰着する。対称多項式の文脈では Macdonald 対称多項式から Jack 対称多項式への退化におけるパラメータの振る舞いに対応している。
この極限以外にも面白い極限がある。それは z を 1 の m 重根として $t=z\,q^\beta$ で $q\to1$ とするものである。Macdonald 多項式でこの極限をとると Uglov 対称多項式と呼ばれるものになり、affine Yangian の Fock 表現の基底を与える。
AGT 予想の文脈でこの対応を考えると、Uglov 対称多項式が平面の m 次巡回群 Zm による商（の特異点解消）上のインスタントン・モジュライと関係し、また “Zm を次数付けとする W 代数” の作用があるとも推測できる。
この描像をより具体化し、予想や証明を与えたい。

(5) W 代数の共形ブロックが物質場付き Nekrasov 分配函数であるというのが（退化していな）元来の AGT 予想の主張であるが、K 理論版を考える場合、今の所共形ブロックに対応する概念が変形 W 代数には存在しない。量子トロイダル代数の Fock 表現の絡作用素が（部分的ではあるが）その対応物を与えるものと期待される。この様に、量子代数を用いるアプローチは共形場理論の差分変形を与える可能性がある。頂点代数の変形、量子 Drinfeld-Sokolov 還元の変形についてもある程度の理論的枠組みを与えることも目標とする。

４．研究成果

「２．研究の目的(3)」で述べた各項目にそって説明する。
(1) 変形 Virasoro 代数の Whittaker ベクトルの明示公式を証明した。（雑誌論文(5)）

証明の方針は「3.研究の方法(1)」で述べた通りだが、より詳しく述べると、必要な漸化式の導出には変形 Virasoro 代数でなく gl(1)量子トロイダル代数の Fock 表現を用いる。

(2) Hall 代数に関して２つ結果を得た。
① 大域次元1の有限なAbel圏について、について、その Ringel-Hall 代数の Drinfeldダブルと2周期複体のHall代数が同型であることを証明した（雑誌論文(5)）。2 周期複体の Hall 代数は Bridgeland(2013)が導入したものであり、そこで上記の主張が述べられてはいたが、証明がなかったため私が与えた。
② 特異な曲線に対する Ringel-Hall 代数の枠組みを与えた。特に node および cusp を 1 つもつ曲線に付随する Hall 代数は楕円曲線上の Hall 代数と同型である。結果はプレプリント”Quantum toroidal algebras and motivic Hall algebras I. Hall algebras for singular elliptic curves”, arXiv:1504.06254 にまとめた。

(3) K 理論的 AGT 予想について 2 つ結果を得た。
① 漸化式を用いる手法で階数 2 の場合を証明し、プレプリント” Norm of the Whittaker vector of the deformed Virasoro algebra”, arXiv:1411.0462 にまとめた。
② Stable envelope を用いる方法を階数 2 の場合に確立した。結果を学会発表(18)において発表した。2016 年 5 月時点では高階の場合が未確定である。

(4) パラメータの変形に関して、階数が 2 で 2 回巡回群の場合、対応する W 代数は N=1 超共形代数であると予想されている。その表現論的証左として、N=1 超共形代数の特異ベクトルが Uglov 対称多項式で実現できるという予想を証明し、プレプリント” Singular vectors of N=1 super Virasoro algebra via Uglov symmetric functions”, arXiv:1508.06036 にまとめた。

(5) 共形場理論の変形について、プレプリント” Classical and Quantum Conformal Field Theories”, arXiv:1402.2943 において factorization algebra の変形の圏論的枠組みを与え、変形 W 代数がその公理を満たすことをしめした。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5　件）
すべて査読あり。
筆者名、タイトル、論文誌名、巻、発行年、頁、DOI の順で表記。

(1) H. Minamide, S. Yanagida, K. Yoshioka, “Some moduli spaces of Bridgeland's stability conditions”, Int. Math. Res. Notices (2014) 2014 (19); 5264-5327. DOI: 10.1093/imrn/rnt126
(2) S. Yanagida, K. Yoshioka, “Bridgeland's stabilities on abelian surfaces”, Math. Z., 276 (2014), Issue 1-2, pp 571-610. DOI:10.1007/s00209-013-1214-1
(3) H. Minamide, S. Yanagida, K. Yoshioka, “The wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions on abelian and K3 surfaces”, to appear in Journal fur die reine und angewandte Mathematik. DOI: 10.1515/crelle-2015-0010
(4) Shintarou Yanagida, “Whittaker vector of the deformed Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions”, Lett. Math. Phys. 106 (2016), Issue 3, 395-431. DOI: 10.1007/s11005-016-0821-2
(5) Shintarou Yanagida, “A note on Bridgeland's Hall algebra of two-periodic complexes”, Math. Z., 282 (2016), Issue 3, pp 973-991. DOI:10.1007/s00209-015-1573-x

〔学会発表〕（計　１８　件）
すべて招待講演。
発表者名は本人のみなので省略。年月日、タイトル、学会名、場所の順で表記。

(1) 2013 年 7 月 13 日, "Stability conditions of sheaves and complexes on algebraic varieties", MAGIC seminar, Imperial College London（イギリス・

ロンドン）
(2) 2013年7月30日,
"Classical and quantum vertex algebras",
超弦理論，表現論，可積分系の数理,
京都大学数理解析研究所（京都府京都市）
(3) 2013年8月10日・11日,
"頂点代数とZamolodchikov型漸化式",
函数方程式論サマースクール,
阿蘇いこいの村（熊本県阿蘇市）
(4) 2013年9月21日,
"On K-theoretic AGT conjecture",
Geometric Representation Theory Seminar,
University of Toronto（カナダ・トロント）
(5) 2013年10月13日,
"Whittaker vector of deformed Virasoro algebra",
Woekshop "Quiver Varieties",
Simons Center for Geometry and Physics（アメリカ・ストーニーブルック）
(6) 2014年3月2日
"Borcherds' new definition of vertex algebras",
the course "Quantum algebras",
Higher School of Economics, Russia（ロシア・モスクワ）
(7) 2014年3月31日,
"K-theoretic AGT conjecture",
頭脳循環 数物合同研究集会,
大阪市立大学（大阪府大阪市）
(8) 2014年6月17日,
"Bridgeland stability conditions and Hall algebras of algebraic curves",
Bridgeland stability and Birational geometries,
京都大学数理解析研究所（京都府京都市）
(9) 2014年9月20日,
"楕円曲面の特異ファイバー上のHall代数",
神戸可積分系セミナー,
神戸大学（兵庫県神戸市）
(10) 2014年10月8日,
"量子トロイダル代数とHall代数",
代数幾何セミナー,
名古屋大学（愛知県名古屋市）
(11) 2015年2月16日,
"量子トロイダル代数とモチーフ的Hall代数",
RIMS Project 2014 Camp-style Seminar,
伊良湖ビューホテル（愛知県田原市）
(12) 2015年3月23日,
"量子トロイダル代数とモチーフ的Hall代数",
日本数学会年会無限可積分系セッション特別講演,
明治大学(東京都千代田区)
(13) 2015年6月5日,
"種々のVirasoro代数のWhittakerベクトル",
Algebraic Lie theory and Representation theory 2015,
岡山いこいの村（岡山県瀬戸内市）
(14) 2015年7月9日,
"N=1 超対称Virasoro代数のWhittakerベクトル",
信州代数セミナー,
信州大学（長野県松本市）
(15) 2015年11月9日,
"Deformed Conformal Blocks",
Workshop on "Quantization of Spectral Curves",
大阪市立大学（大阪府大阪市）
(16) 2016年1月9日,
"K-theoretic AGT relations",
RIKKYO MathPhys 2016,
立教大学（東京都豊島区）
(17) 2016年2月7日,
"Rational CFT and Verlinde algebras" (review),
Koriyama Geometry and Physics Days 2016,
日本大学（福島県郡山市）
(18) 2016年4月7日,
"K-theoretic AGT relation",
京都表現論セミナー,
京都大学（京都府京都市）

〔図書〕（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html
（名古屋大学大学院多元数理解析研究科の個人webpage）

6．研究組織
(1)研究代表者
柳田 伸太郎（YANAGIDA Shintaro）
京都大学 数理解析研究所 助教
研究者番号：50645471

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし