様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００１８

研究課題名（和文）分離商と純非分離商を用いた代数曲線束の研究

研究課題名（英文）Studies on algebraic fibered surfaces by separable quotient and purely inseparable quotient

研究代表者

三井　健太郎（Mitsui, Kentaro）

神戸大学・理学研究科・助教

研究者番号：７０６４４８８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：代数幾何学において代数多様体の分類は最も基本的な問題の一つである．この分類は代数多様体に付随する幾何学的不変量を用いて行われる．本研究では，曲線上に曲線が連なってできた曲面の分類に関して研究を進めた．特に，分類において不可欠である代数多様体の不変量の計算方法を開発した．代数多様体は複数の多項式の連立方程式解として定義されるが，複素数体を係数とする多項式だけではなく，より一般的な体を係数とする多項式で定義された代数多様体についても研究を進めた．特に，正標数体と呼ばれる体を考えた場合には，様々な新しい現象が現れ，それらを説明する理論を構築した．

研究成果の概要（英文）：In algebraic geometry, the classification of algebraic varieties is one of the most fundamental problems, where algebraic varieties are classified by means of their geometric invariants. We consider the case where algebraic varieties are surfaces that are fibered over curves. We develop the methods to calculate invariants of algebraic varieties, which are important in the classification theory. Algebraic varieties are defined as the solutions of simultaneous polynomial equations. In our studies, these polynomials are defined over not only the field of complex numbers but also more general fields. In particular, in the case of fields of positive characteristic, various new phenomena appear, and we develop theories to explain them.

研究分野：代数幾何

キーワード：代数曲線束　楕円曲面　正標数　分離商　純非分離商

1．研究開始当初の背景

正標数体上の代数曲線束の分類問題は未解決であり，代数幾何の重要な問題であるが，従来の方法では十分な結果が得られない．その原因は，標数零の場合に比べて不変量の計算が難しくなるためである．従って，正標数体上の代数曲線束を分類する上で，不変量の計算方法を確立することは主問題である．

2．研究の目的

代数曲線束の不変量の計算法を確立することが最も重要な目的である．小平次元や基本群といった不変量の研究には，特異ファイバーの研究が重要である．特異ファイバーは，単純な構造を持つ曲線束（半安定曲線束）の有限商を使って与えられることが知られている．体論的性質から，商は分離商と純非分離商の二種類に分けられる．

本研究では，第一に，各々の商の持つ特徴を明らかにする．第二に，二つの商の間の関係を明らかにする．これらの研究を基に，不変量の新たな計算法を確立する．得られた結果は，代数曲面や解析曲面（複素解析曲面・リジッド解析曲面）の分類へ応用する．また，曲線束の場合を基に，高次元の代数多様体族や解析多様体族の場合へ理論の拡張を試みる．

3．研究の方法

次に挙げる三つの研究手法を使って問題を解決する．

（1）局所理論の構築

近年，Artin-Tate 予想や BSD 予想の解決等に向けて Liu 氏，Lorenzini 氏，Raynaud 氏により算術曲線に付随する Picard 関手が研究された．この研究過程により，代数的曲線束の局所化に数論幾何を応用した研究へ道が開かれた．複素解析的な曲線束の場合，円盤上の曲線束を研究することが基本であるが，代数的曲線束の場合にもその類似を考え，局所的な曲線束を分析し，大域的な曲線束を研究する．

（2）超越的手法

数論からの要請によりリジッド幾何の基礎が急速に整備されてきた．代数的な手法だけでなく，リジッド幾何を応用した p 進解析的手法も用いて研究を展開する．

（3）分離商と純非分離商の対応

Raynaud 氏による Picard 関手の研究に基づき，Bombieri 氏，Mumford 氏，桂氏，上野氏らにより，分離商や純非分離商を用いた楕円曲面の具体例の構成や不変量の研究が行われてきた．一般の代数曲線束に対して，分離商と純非分離商の対応関係に着目した新しい手法を用いて研究を進める．

4．研究成果

（1）楕円曲線束の分離商の研究結果を，一般の曲線束の場合へ一般化することが出来た．半安定還元定理が示すように，（曲線上の）任意の曲線束は半安定還元を持つ曲線束への同変な作用による商の正則モデルで得られる．固定点のある場合に，曲線束のモデルを上手く選ぶことで現れる商特異点を有理特異点のみに出来ることを示した．また逆に，有理特異点のみ持つモデルを上手く選ぶことで商を正則に出来ることを示した．これにより，有限被覆の分岐に関する理論を応用して曲線束の不変量を計算する道が開かれた．これらの商は一般に平坦ではない．そこで，小平次元や多重種数の研究を念頭に，有限ではあるが平坦ではない射についても相対的双対化層を使って分岐因子を調べ，後の研究のために準備した．さらに，固定点のない場合も，代数多様体族の代数的基本群の研究へ応用することができ重要である．代数多様体族の基本群の計算おいて，構造射が固有でない場合には，Stein 分解を用いる代わりに正規化を応用することができる．その際に，ファイバーの連結性が崩れる問題が現れる．この問題を解決するために連結性が保たれる条件について研究した．

（2）正標数の分離商の特異点に関して，次の結果が得られた．正標数基礎体の標数を p とする．位数が p で割り切れる有限群が曲面に作用している場合，その商特異点についてわかっていることは少ない．有限群の位数が丁度一回だけ p で割れ，さらにその群による作用が二軸に分かれている場合に，具体的な特異点解消の方法を得た．またこれにより，この商特異点に付随する不変量の計算が可能となった．標数が零の場合には，この種の特異点は Hirzebruch-Jung 特異点と呼ばれている．この特異点はトーリック多様体を応用して特異点解消することができる，こうして得られた特異点解消に現れる例外因子は正規交差しており，その条件を満たす特異点解消の中で極小である．このような特異点解消は極小良特異点解消と呼ばれている．またこのとき，Hirzebruch-Jung 連分数と呼ばれる連分数を用いて，特異点解消に現れる例外因子の自己交点数を計算することができる．標数が正の場合にも，上述の状況下において類似した特異点解消を得ることができた．この特異点解消は極小良特異点解消であり，例外因子の自己交点数は丁度三つの Hirzebruch-Jung 連分数を用いて計算することができる．この結果を得るために，複素数体上の代数多様体の代数群による商特異点の特異点解消の類似を考えた．これは商を取る前に双有理変換することで商特異点をより扱い易い商特異点に置き換える方法である．この方法の類似を考え，双有理変換の構成にトーリック幾何を応用し具体的な特異点解消を得た．またこの結果は，大域的な場合に応用できる形で，局所的な場合に定式化

している．

（３）代数群の主等質空間のデデキンド概型上のモデルに関する研究を行った．関数体上滑らかな準射影的代数群の主等質空間は構造代数群を係数とする関数体のガロワ・コホモロジー群により分類される．ガロワ・コホモロジー群の元に対してモデルを定義し，ガロワ・コホモロジー群の元のモデルが与えられたときに，関数体上の主等質空間から良い性質を備えたモデルが構成できることを示した．また，ガロワ・コホモロジー群の元がモデルを持つことと，主等質空間が良い性質を備えたモデルを持つことが同値であることを示した．さらに，応用として以下の二つの結果を得た．
①剰余体が完全である場合に，楕円束の退化ファイバーを分類した．結果として，既約成分の双対グラフの分類にはアフィン・ディンキン図形を拡張した図形が現れることがわかった．この結果は小平とネロンの分類の一般化であり，剰余体が代数的に閉じている場合とは異なる現象を観察できた．
②高次元の代数群の主等質空間についても多重ファイバーとその具体的な解消に関する研究を進めた．楕円曲線束の多重ファイバーの解消問題は，ガロワ・コホモロジーを使って周期と位数の問題と解釈し直すことが出来る．また，ブラウワー群の分裂問題において乗法群をアーベル多様体に置き換えた問題と見做すことも出来き，この視点から Lang 氏と Tate 氏によって研究され始めた．この問題に関して，リジッド幾何による p 進一意化を用いて，アーベル多様体の退化がある良い条件を満たす場合に，最良の結果を与えることが出来た．より具体的には，完備離散付値体上のアーベル多様体の主等質空間上に，次数の小さな閉点が存在することを一定の条件のもと示した．ここでの条件は，剰余体とアーベル多様体の退化に関して課せられる．アーベル多様体の退化が特殊な場合や，主等質空間上の次数の小さな 0-サイクルの存在については以前より幾つかの結果が知られていたが，今回の成果は閉点に関するものであり，次数の小さな 0-サイクルの存在定理の精密化になっている．これらの結果を得るために，代数多様体のモデルと指数の関係についての研究結果を応用した．

（４）正標数体上の多様体のフロベニウス基底変換について研究し，得られた結果を代数多様体族の一般ファイバーへ応用した．最も重要な場合として，代数群の主等質空間の場合について詳しく調べた．この場合，代数群の相対的フロベニウス写像により構造群を取り替えると，代数群の主等質空間から新たな代数群の主等質空間が得られる．この主等質空間と元の主等質空間のフロベニウス基底変換の間の関係を調べることにより，主等質空間上の純非分離的な点を研究した．特に，代数群が超特殊アーベル多様体（superspecial abelian variety）である場合，相対的フロベニウス写像の二回合成は同型の差を除き基礎体の標数倍写像と等しいので，主等質空間のガロワ・コホモロジーに於ける位数と，純非分離的な点の最小次数の間の関係を明らかにした．
　一変数関数体上の楕円曲線の場合には，極小正則モデルを取ることで極小楕円曲面が得られる．逆に，極小楕円曲面の一般ファイバーは楕円曲線の主等質空間として記述できる．上述の結果を，楕円曲面の研究へ応用することで，底空間の曲線を相対フロベニウスで基底変換したときに，ファイバーの重複度の変化を調べることができる．結果として，一般ファイバーが超特異（supersingular）であり特異ファイバーの重複度が標数で割り切れる場合に，フロベニウス基底変換を繰り返すことにより重複度が周期的に減少し，最終的に重複度が標数で割り切れなくなることを示した．

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計４件）

１．Kentaro Mitsui, Iku Nakamura, The direct image sheaf f_*O_X, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 39 巻, 2017 年, 777-782, 10.3836/tjm/1475723086.

２．Kentaro Mitsui, Canonical bundle formula and base change Journal of Algebraic Geometry, 査読有, 25 巻, 2016 年, 775-814, 10.1090/jag/663.

３．Kentaro Mitsui, Homotopy exact sequences and orbifolds, Algebra & Number Theory, 査読有, 9 巻, 2015 年, 1089-1136, 10.2140/ant.2015.9.1089.

４．Kentaro Mitsui, On a question of Zariski on Zariski surfaces, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 276 巻, 2014 年, 237-242, 10.1007/s00209-013-1195-0.

〔学会発表〕（計３０件）

１．三井　健太郎, Models of torsors under elliptic curves, 野田シンポジウム, 東京理科大学（千葉県）, 2017 年 3 月 23 日.

２．三井　健太郎, Models of torsors under elliptic curves, The 2nd OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems, 大阪市立大学数学研究所（大阪府）, 2017 年 3 月 15 日.

３．三井　健太郎, Models of torsors under elliptic curves, Geometry Seminar, Radboud University Nijmegen（オランダ）, 2017 年 3 月 8 日.

４．三井　健太郎，Models of torsors under elliptic curves，Number Theory Seminar，University of Georgia（アメリカ），2017年2月1日．

５．三井　健太郎，Quotient singularities of products of two curves，AG Seminar，University of Georgia（アメリカ），2017年1月25日．

６．三井　健太郎，Models of torsors under elliptic curves，談話会，京都大学（京都府），2016年10月26日．

７．三井　健太郎，Models of torsors under elliptic curves，射影多様体の幾何とその周辺2016，高知大学（高知県），2016年10月8日．

８．三井　健太郎，Homotopy exact sequences and orbifolds，Sino-French Conference in Algebraic and Arithmetic Geometry，Bordeaux University（フランス），2016年5月27日．

９．三井　健太郎，Quotient singularities of products of two curves，神戸幾何学セミナー，神戸大学（兵庫県），2016年5月13日．

１０．中村　郁，モジュライ理論と構造層の順像 $R\pi_*O_X$，Tokyo Journal of Mathematics 筱田記念号刊行に寄せて，上智大学（東京都），2016年3月22日．

１１．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，Seminars in Number Theory and Algebraic Geometry，University of Leuven（ベルギー），2016年1月5日．

１２．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，Séminaire de Théorie des Nombres de Caen，University of Caen Normandy（フランス），2015年11月6日．

１３．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，Séminaire Théorie des Nombres, Bordeaux University（フランス），2015年10月16日．

１４．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，Number Theory Seminar，University of Copenhagen（デンマーク），2015年9月18日．

１５．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，Research seminar Algebraic Geometry，University of Hannover（ドイツ），2015年9月10日．

１６．三井　健太郎，Closed points on torsors under abelian varieties，"Non archimedean analytic Geometry: Theory and Practice"，Maison de la Culture (Papeete)（フランス），2015年8月27日．

１７．三井　健太郎，Quotient singularities of products of two curves，第１３回アフィン代数幾何学研究集会，関西学院大学（大阪府），2015年3月6日．

１８．三井　健太郎，Quotient singularities of products of two curves，正標数のセミナー，東京理科大学（千葉県），2015年2月9日，10日，11日．

１９．三井　健太郎，Unit group, value group, and torsors of an abelian variety，第２回代数幾何学研究集会−宇部−，宇部工業高等専門学校（山口県），2015年1月24日．

２０．三井　健太郎，Unit group, value group, and torsors of an abelian variety，数論幾何学セミナー，北海道大学（北海道），2014年8月4日，5日．

２１．三井　健太郎，Unit group, value group, and torsors of an abelian variety，Kobe-Leuven workshop on Geometry and Integrable Systems，KU Leuven（ベルギー），2014年7月8日．

２２．三井　健太郎，Unit group, value group, and torsors of an abelian variety，代数幾何学セミナー，東北大学（宮城県），2014年6月13日．

２３．三井　健太郎，Unit group, value group, and torsors of an abelian variety，代数幾何学セミナー，京都大学（京都府），2014年5月23日．

２４．三井　健太郎，Canonical bundle formula and base change，学術報告（Colloquium），中国科学院（中国），2014年5月9日．

２５．三井　健太郎，On a question of Zariski on Zariski surfaces，Birational Geometry and Singularities in Positive Characteristic，東京大学（東京都），2013年11月8日．

２６．三井　健太郎，Homotopy exact sequences and orbifolds，代数学セミナー，広島大学（広島県），2013年10月18日．

２７．三井　健太郎,楕円曲面の特異ファイバーの研究とその応用，第 58 回代数学シンポジウム，広島大学，2013 年 8 月 28 日．

２８．三井　健太郎，Homotopy exact sequences and orbifolds，第 4 回代数曲面ワークショップ，首都大学，2013 年 8 月 3 日．

２９．三井　健太郎，On a question of Zariski on Zariski surfaces，代数セミナー，神戸大学（兵庫県），2013 年 7 月 10 日．

３０．三井　健太郎，On Zariski's question on Zariski surfaces，代数曲面ワークショップ，首都大学（東京都），2013 年 5 月 11 日．

〔図書〕（計０件）
なし

〔産業財産権〕
なし

○出願状況（計０件）
なし

○取得状況（計０件）
なし

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.kobe-u.ac.jp/home-j/index7-1-35.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　三井　健太郎（MITSUI, Kentaro）
　神戸大学・大学院理学研究科・助教
　研究者番号：70644889

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
　中村　郁（NAKAMURA, Iku）
　北海道大学・大学院理学研究科・名誉教授
　研究者番号：50022687