様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８０００２５

研究課題名（和文）アーベル多様体のモジュライの有理点とその周辺に関する研究

研究課題名（英文）Research on rational points on moduli of abelian varieties and related topics

研究代表者
新井　啓介（Arai, Keisuke）

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：８０４２２３９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：　有理点問題は、多項式を用いて表される方程式の有理数解および固定された体における解を求めることと関連しており、数論における基本的課題である。一方、モジュライの有理点問題は、モジュライの定義方程式の解を求めることに加えて、有理点と対応する幾何的対象を分類するという意味合いもあり、数論幾何における重要課題である。
　本研究により、アーベル多様体から定まるガロア表現の中に起こりうる指標の可能性を、従来知られているより広い範囲で決定した。さらにその結果を用いて、アーベル多様体のモジュライの一種である志村曲線の有理点を決定する方法を得た。具体的な数値例も得て、研究成果の可視化も進めることができた。

研究成果の概要（英文）：The problem on rational points is a basic problem in number theory; it is related to solving equations defined by polynomials. On the other hand, the problem on rational points on moduli spaces is an important subject in arithmetic geometry; it is also related to classifying geometric objects corresponding to rational points.
 In this research, we have determined possible characters appearing in the Galois representations associated to abelian varieties. Also, by using this result, we have obtained criteria of non-existence of rational points on a Shimura curve, which is a certain moduli space of abelian varieties. Furthermore, we have several numerical examples, which make the results visible.

研究分野：数論幾何

キーワード：有理点　モジュライ　アーベル多様体　ガロア表現

１．研究開始当初の背景

アーベル多様体のモジュライの有理点問題は、多項式の解を見つけるという観点からしても、アーベル多様体やその付加構造を分類するという観点からしても、数論幾何における最重要課題のうちの１つである。

有理点問題に対する研究成果は、曲線の場合（すなわち 1 次元の場合）の、Faltings による Mordell 予想の解決が基本的である。高次元多様体の有理点については、Bombieri により予想はされているが、未解決である。一方で、モジュライの有理点問題に関しては、素数位数 p の部分群付き楕円曲線のモジュライのコンパクト化（モジュラー曲線 X_0(p) と呼ばれる）に対する Mazur の研究が基本的であろう。X_0(p)の有理点問題は、楕円曲線から定まるガロア表現の像を決定しようという Serre の問と密接に関連している。Mazur の研究は有理数体に関するものであるが、証明の議論の中に出てくるガロア群の指標の分類を改良することにより、百瀬により 2 次体上の有理点へと一般化された。

楕円曲線は 1 次元アーベル多様体である。ガロア表現の像という観点からしても、（構造付き）アーベル多様体のモジュライの有理点問題は重要な研究課題である。QM アーベル曲面と呼ばれる、４元数環による乗法をもつ 2 次元アーベル多様体は、楕円曲線と類似する性質をもつ。研究代表者は、百瀬の手法にならってガロア群の指標の分類を行うことにより、¥Gamma_0(p)型志村曲線（すなわち構造付き QM アーベル曲面のモジュライであり、モジュラー曲線 X_0(p)の類似となっているようなもの）の 2 次体上の有理点に関する研究結果を得た。さらに、指標の分類を、QM アーベル曲面や志村曲線を定義する際に用いられる４元数環の代数的性質とうまく組み合わせることにより、以前の結果を、ある広いクラスに属する代数体へと拡張した。

先にも述べたが、モジュライの有理点問題は、数論幾何における様々な重要課題と深い関わりをもつ。研究代表者は、志村曲線の有理点の研究と同時に、QM アーベル曲面から定まるガロア表現の像に関する既約性という結果を得た。さらに、Rasmussen-玉川による、ある種のアーベル多様体の有限性予想に対して、QM アーベル曲面の場合に貢献した。

２．研究の目的

本研究では、アーベル多様体のモジュライの有理点を調べる手法を開発し、有理点問題を広く開拓していくことを目的とする。同時に、有理点問題の周辺に位置する課題にも取り組む。以下の５つを目標とする。

⑴ [アーベル多様体に伴うガロア表現に現れる指標の分類]
アーベル多様体に伴うガロア表現や、そこから生じる指標は、そのアーベル多様体の自己準同型環による制限を強く受ける。そのガロア表現に現れる指標は、限られたパターンしか起こり得ないだろうと研究代表者は推測している。そのパターンを決定する。

⑵ [指標の分類を用いて、アーベル多様体のモジュライの有理点がどれくらいあるかを明らかにする]
Mazur、百瀬や研究代表者の過去の研究成果からも明らかなように、指標の分類は、アーベル多様体のモジュライの有理点問題に対して決定的に重要な役割を果たす。そこで、指標の分類を利用して様々なアーベル多様体のモジュライの有理点を調べていく。

⑶ [アーベル多様体から定まるガロア表現の像の形の分類]
指標を分類したり有理点を調べたりすることは、ガロア表現の像を調べることと密接に関係している。そこで、指標の分類や有理点問題の帰結を用いて、アーベル多様体から定まるガロア表現の像の形を分類する。

⑷ [アーベル多様体の有限性予想への貢献]
有理点やガロア表現の像を調べることで、ある種のアーベル多様体の有限性が分かる場合がある。そこで、アーベル多様体の有限性予想の解決に向けて貢献する。

⑸ [アーベル多様体のモジュライの有理点に関する一般的な予想の定式化]
指標の分類だけでは取り扱えなかったモジュライの有理点問題に対して予想を定式化し、さらなる発展を目指す。

３．研究の方法

(1)代数体上定義されたアーベル多様体に伴うガロア表現の中に生じる指標を詳細に分類する。
(2)指標の分類を用いて、構造付きアーベル多様体のモジュライの有理点を調べる。
(3)アーベル多様体に伴うガロア表現の像の形を調べる。
(4)アーベル多様体の有限性予想に貢献する。
(5)(2)で取り扱えなかった構造付きアーベル多様体のモジュライの有理点問題に対する予想を定式化し、その予想をガロア表現の言葉に翻訳する。

４．研究成果

(1)アーベル多様体に伴うガロア表現や、そこから生じる指標は、そのアーベル多様体の自己準同型環による制限を強く受ける。そのガロア表現に現れる指標のパターンを決定した。さらに、その結果を生かして、レベル構造ありとなしの志村曲線に関する有理点を決定する方法を得た。モジュライの有理点と対応する幾何的対象の field of definition と、その有理点の field of moduli は一般に異なるのであるが、field of definition をうまく制御することにより、新たな成果を生むことができた。さらに、具体的な数値例も得ることができ、研究成果の可視化を進めることができた。

この成果は、有理点問題における新たな成果を生んだというだけでなく、(従来の手法を発展させる)新たな手法を開発したことにもなり、今後の研究の進展にもつながる可能性を大きくはらんでいる。同時に、従来の手法の有用性を再確認したことにもなる。

(2)(1)のレベル構造なしの志村曲線上の有理点に関する結果の応用として、志村曲線上の Hasse 原理の反例を得た。さらに、この Hasse 原理の反例が、Manin obstruction により説明されることを示した。証明の手法は、有理点に関する結果を得るときに用いたガロア表現を利用する方法を改良したものである。

この成果は、有理点の非存在がコホモロジー的なものと関係していることを示すものであり、さらなる研究の発展が期待される。

(3)レベル構造なしの志村曲線の虚２次体上の有理点に関して、その体が志村曲線を定める４元数環を分解する場合の振る舞いがすでに知られていたが、分解しない場合は未知であった。ここでは、分解しない場合の有理点の非存在の問題を、条件付きで解決した。

この成果は、レベルが上がればモジュライの有理点は少なくなるか、という基本的な問題に対する答えを示唆するものである。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

① Keisuke Arai, Algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type (III), The Ramanujan Journal, published online (2016), 14 ページ, 査読有り
DOI: 10.1007/s11139-015-9766-9

②Keisuke Arai, Non-existence of points rational over number fields on Shimura curves, Acta Arithmetica 172.3 (2016), 243-250, 査読有り

③ Keisuke Arai, Algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type (II), Manuscripta Mathematica 149 (2016), 63-70, 査読有り

④ Keisuke Arai, Algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type (IV), RIMS Kokyuroku Bessatsu B53 (2015), 3-11, 査読有り

⑤ Keisuke Arai, An effective bound of p for algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type, Acta Arithmetica 164 (2014), 343-353, 査読有り

⑥ Keisuke Arai and Fumiyuki Momose , Algebraic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type, Journal fur die reine und angewandte Mathematik 690 (2014), 179-202, 査読有り

⑦Keisuke Arai, On the Rasmussen-Tamagawa conjecture for QM-abelian surfaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu B44 (2013), 185-196, 査読有り

〔学会発表〕（計１５件）

①新井 啓介, モジュラー曲線の商の有理点について, プロジェクト研究集会 2015, 湯河原温泉 ホテルあかね（神奈川県・足柄下郡湯河原町）, 2016 年 3 月 9 日.

②Keisuke Arai, Various criterions for non-existence of rational points on Shimura curves, 2016 Korea-Japan Joint Number theory Seminar, POSTECH, ポハン（韓国）, 2016 年 2 月 1 日.

③新井 啓介, 虚 2 次体が 4 元数体を分解しない場合の志村曲線の有理点について, 代数的整数論とその周辺, 京都大学（京都府・京都市）, 2015 年 12 月 1 日.

④Keisuke Arai, Points on Shimura curves rational over imaginary quadratic fields in the non-split case, 29th Journees Arithmetiques, University of Debrecen, デブレツェン（ハンガリー）, 2015 年 7 月 6 日.

⑤新井 啓介, モジュラー曲線及び志村曲線のレベルと有理点について, プロジェクト研究集会 2014, ハートピア熱海（静岡県・熱海市）, 2015 年 2 月 26 日.

⑥Keisuke Arai, Points on Shimura curves rational over imaginary quadratic fields in the non-split case, 日韓整数論セミナー2014, 慶應義塾大学（神奈川県・横浜市）, 2014 年 11 月 20 日(～22 日) (ポスター発表).

⑦新井 啓介, 代数体の無限族と $\Gamma_0(p)$型志村曲線の有理点, 第 13 回仙台広島整数論集会, 東北大学（宮城県・仙台市）, 2014 年 7 月 18 日.

⑧新井 啓介, 志村曲線の有理点の非存在の判定法, 京大数論合同セミナー, 京都大学（京都府・京都市）, 2014 年 5 月 9 日.

⑨新井 啓介, アーベル多様体のモジュライの有理点について, プロジェクト研究集会 2013, 箱根高原ホテル（神奈川県・足柄下郡箱根町）, 2014 年 3 月 6 日.

⑩新井 啓介，志村曲線の有理点と Hasse 原理,九州代数的整数論 2014，九州大学（福岡県・福岡市），2014 年 2 月 7 日．

⑪新井 啓介，代数体上の楕円曲線とそのねじれについて，北陸数論研究集会，金沢大学（石川県・金沢市），2013 年 12 月 26 日．

⑫新井 啓介，志村曲線の代数体上の有理点の非存在について，代数的整数論とその周辺，京都大学（京都府・京都市），2013 年 12 月 13 日．

⑬Keisuke Arai，Non-existence of rational points over number fields on certain Shimura curves，Conference on Geometry and Cryptography (GeoCrypt) 2013，Lycee Hotelier de Tahiti Punaauia，フレンチポリネシア・タヒチ（フランス），2013 年 10 月 8 日．

⑭新井 啓介，$\Gamma_0(p)$型志村曲線上の楕円点の非存在について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，愛媛大学（愛媛県・松山市），2013 年 9 月 24 日．

⑮Keisuke Arai，Non-existence of elliptic points on Shimura curves of $\Gamma_0(p)$-type，28th Journees Arithmetiques，University Joseph Fourier Grenoble I，グルノーブル（フランス），2013 年 7 月 1 日．

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
新井　啓介（ARAI，Keisuke）
東京電機大学・未来科学部・准教授
研究者番号：８０４２２３９３

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：