様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８０００２８

研究課題名（和文）ホモロジカル予想と数論への応用

研究課題名（英文）Homological conjectures and applications to arithmetic geometry

研究代表者
下元　数馬（SHIMOMOTO, Kazuma）

日本大学・文理学部・准教授

研究者番号：７０５８８７８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：可換環論の手法とp進ホッジ理論の考え方を用いて、直和因子予想、巨大コーエン・マコーレー環に関して調べ幾つかの結果を得ることができた。これらの研究の過程においてヴィット環の代数的構造を詳しく調べ、今まで全く知られていなかった基本的な結果を発見することが出来た。数論への応用を見込んで正規な局所環に対するベルティニ型定理を研究し、岩澤理論で重要な役割を果たす特性イデアルへの応用を与えた。これらの成果をまとめたものを共同論文として出版することが出来たことは重要な成果である。正標数の局所コホモロジー上のフロベニウス作用が単射であるような環をF-単射と呼ぶ。F-単射環の変形問題をある条件の下で解決した。

研究成果の概要（英文）：I made effective use of the techniques and ideas from commutative ring and p-adic Hodge theory to study the Direct Summand Conjecture and the big Cohen-Macaulay algebras. I obtained some interesting results. While studying these questions, I also studied the ring-theoretic structure of the Witt vectors and Noetherian rings with mixed characteristic. I published a joint paper on the local Bertini theorem for normality on local rings with mixed characteristic, including its application to the characteristic ideals of certain modules, which play an important role in Iwasawa theory. Finally, let me report on a joint work on giving a partial answer to the deformation problem on a certain class of F-singularities defined by the local cohomology modules.

研究分野：代数学

キーワード：可換環論　岩澤理論　特異点　ホモロジカル予想

１．研究開始当初の背景

（１）　代数的手法は数論や代数幾何の研究を行う上で基本的であり欠かせないものである。数論では整数環を始めとして、ヘッケ環や変形環として自然な形で現れる。最初に代数幾何的な側面に関して幾つかの視点について述べたい。双有理幾何学では特異点解消を通じて例外因子の振る舞いによって特異点の重要なクラスが考えられている。これらの特異点は層係数コホモロジー消滅定理とも関係しており、それ自身が興味深い研究対象である。近年、層係数コホモロジーの代わりに局所コホモロジーとフロベニウス写像を用いてこれらの特異点解析が活発に行われつつある。標数零では Du-Bois 特異点が非常に大きな特異点のクラスとして扱われている。これの正標数に対応するものとして F-単射環というものが知られており、当該研究代表者を含む複数の研究者によって詳しく調べられている。特異点の解析においては主にトポロジー的手法と代数的手法が知られており、トポロジー的な視点は近年、多くの研究者によって様々な形で発展してきている。本研究では代数的な視点に力点を置く。

（２）　数論幾何の研究では環論的手法のみならず、トポロジー、解析学、表現論といった他分野に亙る道具とアイデアが使われている。ここでは環論的な側面について述べたい。伝統的な数論では Dedekind 環に代表されるように、必ずしも体を含まない可換環が扱われる。環の次元が高くなると解析が一層困難となり、高次元の対象を調べるための道具が未だ不足している状態にある。また可換環論において最も重要な未解決問題であるホモロジカル予想は、環が体を含まない状況において幾つかの部分的結果を除けば、４次元以上では依然として未解決状態である。これらの問題の解決のためには全く新しいアイデアが必要であると共に、今まであまり開拓されてこなかった問題意識を発見することが求められている。

２．研究の目的

（１）　本研究における主要な目的の一つとして、特異点や数論幾何の研究で役立つような環論的手法を大きく発展させることにある。特異点の研究では局所コホモロジー上のフロベニウス作用を詳しく調べる。また混合標数を持つ場合には Witt 環が強力な道具となる。Witt 環上にもフロベニウス写像の類似のようなものが定義される。これを用いて概純性定理を詳しく調べ、その応用としてホモロジカル予想を考察する。これとは別に岩澤理論や肥田理論への応用のために、局所環の Bertini 型定理を詳しく調べる。この事実は環論の結果としても非常に興味深い。具体的な目的として、正規な完備局所環で剰余体が無限であるものは非常に沢山の自明でない正規な超曲面を持つことを証明する。この結果は混合標数を持つ場合が最も難しく、繊細な議論が必要とされる。

（２）　近年の Gabber による優秀環の研究は環論的に重要な考え方が多く含まれている。結果そのものが重要と言うよりも、その証明のプロセスで使われた手法に大きな意味があると考えている。例えば、Artin-Popescu の近似定理が特異点解消問題の代わりである優秀スキームの弱一意化定理の証明において洗練された形で使われている点は興味深い。Gabber の手法を詳しく調べ、場合によっては別証明を与え、岩澤理論やホモロジカル予想への応用を考えることは十分に意義があると考えている。

３．研究の方法

（１）　体上の多項式環は代数幾何や組み合わせ論でも扱われており、フロベニウス射、特異点解消定理、コホモロジー消滅定理等、使える道具が豊富である一方、体を含まない環の研究はその重要性にも関わらず、困難を極めている。Cohen 構造定理や Witt 環など、昔からある道具を洗練された形で用いる。ネーター性必ずしも満たさない巨大な可換環も扱う。この方面の数学に詳

しい専門家とセミナーを開催し議論を活発に行うことで研究を深化させたい。また数論関連の文献を読み込み、その分野の専門家と討論することで、研究方針の適切な調整を行いたい。

（２） 代数多様体の特異点解析の為にはコホモロジー論が欠かせない。特に層係数コホモロジーや局所コホモロジーはよく使われる道具である。より具体的には、次数付き環の解析を用いて、コホモロジー加群上のフロベニウス写像がもたらす情報を調べる。局所コホモロジーはネーター性を満たすとは限らないので、非ネーター環の研究も同時進行で行う。非 Cohen-Macaulay 環の研究において蓄積された過去の結果（Schenzel、後藤四郎による多くの結果がある）も有効に用いる。またセミナーで他の研究者の意見を聞く機会にも恵まれているので、積極的に活用したい。

４．研究成果

（１） Davis-Kedlaya による概純性定理と Witt 環上のフロベニウス写像を用いて、ホモロジカル予想の一部分である、巨大 Cohen-Macaulay 環の存在定理をある条件付きで重要なケースを肯定的に解決した。この証明で使われた手法の背景には、Faltings によって発展させられた p 進ホッジ理論が土台となっている。近年、Faltings のものとは異なるアプローチが発見され、上記の Davis-Kedlaya の流儀が予想を解く上で使いやすい形となっている。この手法は更に発展する可能性を秘めているように思われる。

（２） 上記の研究と関連して、Witt 環が正規環であるための十分条件を得た。より正確には、ネーター環上整拡大であるような正規かつ完全な環に対する Witt 環が正規であることを示した。これは古典的に良く知られている、以下の結果の自然な拡張となっている。標数が正の完全体の Witt 環は完備離散付値環である。特に正規環である。この古典的事実は Serre の有名な局所体の教科書でも紹介されている。

（３） 混合標数を持つ場合に、局所環の正規性に関する Bertini 型定理を証明した。これは 1977 年に発表された Flenner の論文で示されたアイデアに基づいている。副産物として岩澤理論で基本的な役割を演じる特性イデアルの制御定理を得た。これは一種の CT スキャン的な働きをすると考えられ、次元に関する帰納法において非常に便利である。Bertini 型定理は多くの変種が知られており、更に続けて研究を行う予定である。数論への応用として、Euler 系の評価を一般の正規な Cohen-Macaulay 変形環上まで拡張するという問題に取り組んでいる。落合理氏との共同研究において Beilinson-加藤の Euler 系を肥田変形上で議論することを目標にしている。

（４） 正標数の局所環の局所コホモロジーのフロベニウス写像を用いて与えられるクラスの環に F-単射環とよばれるものがある。これは標数零における Du-Bois 特異点の類似であると広く信じられている。「F-単射環は必ず変形するか？」という変形問題をある条件の下で肯定的に解決した。この問題は Du-Bois 特異点に対しては Kovacs-Schwede によって既に肯定的に解決されており、F-単射な特異点に対しても正しいと期待されている。F-単射性が元の環に持ち上がることを示す際に、局所コホモロジーの有限性という仮定が本質的な役割を演じる。今後の研究の方向性として、局所コホモロジーの有限性を外すことが考えられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

（１） K. Shimomoto, **An application of the almost purity theorem to the homological conjectures**, 査読有, J of Pure and Applied Algebra **220** (2016), 621-632.

（２） K. Shimomoto, **On the Witt**

vectors of perfect algebras in positive characteristic, 査読有, Communications in Algebra **43** (2015), 5328-5342.

（３） T. Ochiai, K. Shimomoto, **Bertini theorem for normality on local rings in mixed characteristic (applications to characteristic ideals)**, 査読有, Nagoya Math. J. **218** (2015), 125-173.

（４） J. Horiuchi, L. E. Miller, K. Shimomoto, **Deformation of F-injectivity and local cohomology**, 査読有, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 1139-1157.

〔学会発表〕（計 5 件）

（１） 下元数馬, F-singularities and non-Cohen-Macaulay rings (joint work with P. H. Quy), Commutative Algebra Seminar、ソルトレイクシティー, ユタ大学 3 月 11 日 (2016)

（２） 下元数馬, Cohen-Gabber の定理の初等的な証明について (蔵野和彦氏との共同研究), 代数セミナー、中央大学 11 月 27 日 (2015)

（３） 下元数馬, A new proof of a theorem of Cohen and Gabber, 可換環論シンポジウム 37 回(国際学会), 倉敷シーサイドホテル（岡山県）11 月 22 日 (2015)

（４） 下元数馬, An application of a theorem of Cohen and Gabber to Bertini-type theorem on local rings of positive characteristic, The JV Seminar on Commutative Algebra(招待講演), 明治大学 9 月 19 日 (2015)

（５） 下元数馬, A new proof of a theorem of Cohen and Gabber, Commutative Algebra Seminar、ソルトレイクシティー, ユタ大学 9 月 11 日 (2015)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

下元 数馬（SHIMOMOTO, Kazuma）
日本大学・文理学部・准教授
研究者番号：70588780

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：