

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 26 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800029

研究課題名(和文)パラメータ付き方程式系の数式処理を用いた孤立特異点の研究

研究課題名(英文)Study of parametric system of equations for singularity theory

研究代表者

渋田 敬史 (Shibuta, Takafumi)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号：40648200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：正則局所環上の項順序付きのマトリス双対の理論を構築し、それを利用して係数にパラメータを含む代数的局所コホモロジー類の満たす、オーダーが n 以下の線形微分作用素からなるホロノミック系を計算するアルゴリズムを得た。また、トーリックイデアルを用いた、右辺ベクトルにパラメータを含む線形整数問題を解く、代数的アルゴリズムも構築した。

研究成果の概要(英文)：In this research, the theory of Matlis duality with term orders over regular local rings was developed. Based on the theory, a new algorithm it for computing the holonomic system consisting of the linear differential operators of order at most n that vanishes a given algebraic local cohomology class was presented. An algebraic algorithm based on toric ideal theory for solving parametric linear integral programming was also presented.

研究分野：可換環論, 計算機代数

キーワード：標準基底 代数的局所コホモロジー マトリクス双対 アルゴリズム 計算機代数 局所可換環論 パラメトリック方程式系

1. 研究開始当初の背景

パラメータを持つ方程式系は、純粋数学だけでなく、工学などにおける様々な数学モデルに自然に現れるものである。パラメータの値によって系の性質は変化していくが、性質が悪くなるようなパラメータの値の集合は疎な集合であり、パラメータによる系の性質の変化を正確に解析するには、誤差無く計算する必要がある。方程式系を誤差無く計算することを目的とする数式処理、または計算機代数と呼ばれる分野で、電子計算機の発明とその性能の劇的な向上に伴って近年急速に発展してきた。理論面では 1960 年代の Buchberger と広中によるイデアルのグレブナー基底、標準基底の概念の発見と、それらを求めるアルゴリズムの出現を機に、盛んに研究されるようになった。パラメータを含む多項式系のグレブナー基底の計算は、1992 年の Weispfenning によるパラメトリック・グレブナー基底の計算アルゴリズムを始まりとして、以降様々な研究者によって研究されており、日本人研究者の貢献も大きい。また、現在も効率化等の研究が盛んに行われている。他にも微分方程式の分岐や、パラメータを含む最適化問題など、計算機を利用したパラメータを含む系の研究は近年盛んに行われている。

研究開始当初、田島 - 中村により、代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系から定義される不変量が定義され、平面曲線の場合の研究が存在した。しかし、より一般の場合の研究はまだ行われていなかった。

また、右辺ベクトルにパラメータを含む線形整数計画問題は、コンパイラの最適化などの目的で研究されており、単体法と Gomory の切除平面法をパラメータ化した Feautrier のアルゴリズム、Verdoolaege のアルゴリズムが提案されており、その実装も得られていた。このアルゴリズムは計算量の評価が難しく、また、このアルゴリズムは、場合によっては必要のないパラメータ空間の分割をしてしまう事があるという問題があった。パラメトリック整数計画問題に対する代数的な研究はまだされておらず、代数的な手法を用いることによって、理論的な解析が可能になり、またより良い実装がえられる可能性が残されていた。

2. 研究の目的

いくつかの変数によってパラメータ付けられた、原点に孤立特異点を持つ超曲面を考え、パラメータを変化させることによって、対応する超曲面の特異点の解析的性質がどのように変化していくかを調べる。解析的同型は Mather - Yau によって、モジュライ代数と呼ばれる局所アルチン環の同型判定問題に帰着できることが知られているが、環の同型性判定はとても難しい問題であり、理論的には環の同型判定は全ての環準同型を考え、その中に同型が含まれているかを調べる

ことは可能ではあるが、現実的な時間で計算できるような問題ではない。そこで、代数構造をもった不変量ではなく、定義方程式から導かれる、解析的不変量である数値を用いたパラメータの分類を考える。本研究では、ヤコビイデアルに対応する代数的局所コホモロジーを超関数とみなし、この超関数の満たす微分作用素がオーダーごとにどのくらいあるかを調べ、その大きさによるパラメータの分類を行う。自然数 $n=0, 1, 2, \dots$ に対して、代数的局所コホモロジー類が満たす、オーダー n 以下の線形偏微分方程式からなるイデアルはホロノミックになるので、このホロノミック系の解空間の次元を、ここでは、 n 番目の不変量と呼ぶことにする。この不変量たちの 0 番目のものは、ミルナー数と呼ばれるものとも一致する。ミルナー数は 3 次元以外の場合には、ミルナー数が不変の変形は位相的に自明であることが知られている、重要な不変量である (3 次元の場合はいまだにオープンな問題である)。この意味で、この新たに定義された不変量は、ミルナー数の一般化とすることができる。また、ミルナー数と並んで重要な不変量として知られている、解析的不変量であるチュリナ数と、この新たな不変量の 1 番目のものとの関係も、田島 - 中村によって調べられている。この不変量は解析的不変量であるから、解析的同型による分類はこうして得られた分類の細分になっている。オーダーを大きくしていくごとに分類がどのように変化していくかを調べるため、効率的なアルゴリズムを構築する必要があった。また、パラメータを含む方程式系に関する話題として、パラメトリック整数問題があるが、この代数的な解析は今までされておらず、計算量も不明の状態であったので、この研究も行った。

3. 研究の方法

可換環論を用いて問題を解析し、それに基づいてアルゴリズムの構築と考察を行った。また、必要に応じて、専門家と共同研究を行った。代数的局所コホモロジーに関することは田島慎一氏と、整数計画問題に関することは夫紀恵氏と活発に議論をし、共同研究を行った。

4. 研究成果

代数的局所コホモロジー類の満たすオーダーが n 以下の作用素からなるホロノミック系を求めるアルゴリズムを構築した。このアルゴリズムは数式処理システム Risa/Asir 上に実装した。また、このアルゴリズムを構築するために、体上の形式べき級数環上の自由加群とその上の局所順序を固定したとき、その自由加群のマトリス双対にも、自然と全順序が定まり、自由加群の部分加群の局所順序に関する標準基底と、その剰余加群のマトリ

ス双対に深い関係があることを明らかにした。これは、項順序付きのマトリクス双対定理ともいえるもので、この理論を用いたさらなる計算機代数的な研究の可能性を示すことができた。例えば、代数的局所コホモロジーを用いた0次元イデアルの標準基底をパラメータ付きで計算するアルゴリズムが田島 - 鍋島 - 中村によって提案されているが、このアルゴリズムの加群版などを考えることができる。標準基底を計算するアルゴリズムとしては、Moraのアルゴリズムと、Lazardの斉次化手法の大きく分けて2つの手法が以前から知られているが、項順序付きのマトリクス双対定理を用いた手法は、剰余加群が長さ有限の場合にのみしか適用できないが、効率的であり、パラメータ付きの計算に適しているという利点が挙げられ、また、MoraやLazardの方法では計算できない、正規形や被約標準基底の計算ができるという利点がある。

また、右辺ベクトルにパラメータを含む線形整数計画問題を解く、トーリックイデアルを用いた代数的なアルゴリズムを構築した。トーリックイデアルを用いた整数計画問題は、1991年の割り算アルゴリズムを利用したConti Traversoのアルゴリズムを始め、線形方程式を利用したHosten Thomasのアルゴリズムなどが知られていたが、実際の整数計画問題を解くには計算量が大きすぎて向いておらず、主に理論的な研究に用いられてきた。本研究ではHosten Thomasのアルゴリズムのパラメータ版を構築し、このアルゴリズムが、右辺ベクトルが全て変数の場合には、他の手法と比べても高速に問題を解くことができ、無駄な分割を生成しないことを示した。また、トーリックイデアルの理論を用いて、計算量の評価も行うことができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計2件)

1. Takafumi Shibuta, Shinichi Tajima, An Algorithm for Computing the Truncated Annihilating Ideals for an Algebraic Local Cohomology Class, 査読有, Lecture Notes in Computer Science, Vol. **8660**, 447-459
2. Norie Fu, Takafumi Shibuta, An algorithm for solving parametric integer program, 査読有, Electronic Notes in Discrete Mathematics **50**, 299-305 (2015)

〔学会発表〕(計10件)

1. 渋田 敬史, パラメータを含む代数的局所コホモロジー類の満たす偏微分方程式系, 2013.12.25, 京都大学数理解析研究所研究集会「数式処理とその周辺分野の研究

-- Computer Algebra and Related Topics」, 京都大学(京都)

2. 渋田 敬史, パラメータを含む代数的コホモロジー類の満たす偏微分方程式系の計算アルゴリズムとその実装, 2014.03.04, Risa/Asir Conference 2014, 神戸大学(兵庫)
3. Takafumi Shibuta, Multiplier ideals and test ideals of complete intersection binomial ideals, 2013.05.08, The Commutative Algebra of Singularities in Birational Geometry: Multiplier Ideals, Jets, Valuations, and Positive Characteristic Method, MSRI, Berkeley, USA
4. Takafumi Shibuta, Shinichi Tajima, An algorithm for computing the truncated annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, 2014.09.12, Computer Algebra in Scientific Computing, CASC 2014, Warsaw, Poland
5. 渋田 敬史, 田島 慎一, マトリクス双対定理を用いた代数的コホモロジー類の満たす偏微分方程式系の計算アルゴリズム, 2014.05.31, 日本数式処理学会第23回大会, 徳島大学(徳島)
6. 渋田 敬史, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類の満たす偏微分方程式について, 2014.12.20, 第12回代数曲線論シンポジウム, 日本大学(東京)
7. Norie Fu, Takafumi Shibuta, An algorithm for solving parametric integer programming, 2015.05.13, The VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, Fortaleza, Brazil.
8. Takafumi Shibuta, An algorithm for parametric integer programming, 2015.08.14, The International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) 2015,
9. 渋田敬史, 整数計画問題の周期性と先頭項イデアルのCohen-Macaulay性, 2016.2.16, グレブナー若手集会, 東海大学(神奈川)
10. 渋田 敬史, 田島 慎一, マトリクス双対を用いた加群の標準基底の計算, 2016.3.16, 日本数学会2016年度年会(代数学), 筑波大学(茨城)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渋田敬史 (SHIBUTA TAKAFUMI)

九州大学 マス・フォア・インダストリ研
究所・助教

研究者番号：40648200

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし