2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号： ３２６５７
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５８０００３１
研究課題名（和文） 数論的ゼータ関数の諸性質の相関性について

研究課題名（英文） On correlation among some properties of arithmetic zeta functions

研究代表者
見正　秀彦（Mishou, Hidehiko）

東京電機大学・情報環境学部・准教授

研究者番号：１０４３５４５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：研究題目１「Steuding予想」については、2個の実係数ゼータ関数の同時普遍性、3個のゼータ関数間の同時普遍性を得ることに成功した。題目２「零点虚部をパラメーターとしたRiemann zeta関数z(s)の値分布」に関しては、dが1未満の正数である場合、z(s+idg)が零点虚部gの変動に伴い、普遍性を示すことを証明した。最後に、題目３「同時普遍性の算術パラメーター化」については、Dirichlet 指標の変動に伴うDirichlet L関数の同時普遍性定理、ならびに実指標への制限を証明することに成功した（名越弘文氏との共同研究）。

研究成果の概要（英文）：On Theme 1 "Steuding Conjecture", I obtained the joint universality theorem for a pair of zeta functions with real coefficients and the joint universality theorem for a set of the Riemann zeta function and two automorphic L-functions.
On Theme 2 "Value distribution of the Riemann zeta function z(s) with respect to the imaginary part of zeros", I showed that for a positive number d less than 1, the universality property holds for z(s+idg) as g varies, where g denotes the imaginary part of a complex zero of z(s).
On Theme 3 "Joint universality for zeta functions with respect to arithmetic parameters", I obtained that the joint universality theorem for Dirichlet L-functions in the character aspect and the joint universality theorem for quadratic L-functions in the real character aspect (joint work with Hirofumi Nagoshi (Gunma University)).

研究分野： 解析的整数論

キーワード： ゼータ関数

１．研究開始当初の背景

(1) 数論的ゼータ関数の諸性質について

解析的整数論において数論的ゼータ関数はきわめて重要な研究対象である。数多くの研究成果が知られているが、それらは

(i)複素零点の分布に関する結果
（素数定理,Riemann 予想等）

(ii)値分布に関する統計的結果
（Bohr, Voronin, Matsumoto の研究）

(iii)係数の和に関する結果（直交性）
（係数の２乗平均評価,Selberg 予想）

の３つの方向性に分類することができる。

(2) 諸性質の相関性についての結果と予想

B.Bagchi(1981)は Dirichlet 指標の周期性と直交性を用いて、Dirichlet L 関数に対する同時普遍性定理を証明した。一方、Conrey-Ghosh-Gonek(1984) は異なる指標に付随する Dirichlet L 関数の零点分布は一致しないこと、厳密には非共通零点が正の密度で存在することを証明している。

これらの結果に見られる「ゼータ関数の係数の直交性（+周期性）⇒ ゼータ関数の零点分布、値分布の独立性」という関係が、数論的ゼータ関数の集合（Selberg 類）内でも成り立つと予想されており、その確認に向けた研究が幾つか行われている。特に J.Steuding（引用文献 3）は「係数の直交性（Selberg 予想）を仮定すると、２つの異なるゼータ関数に対し、同時普遍性定理が成立する」と予想してた(Steuding 予想)。この予想は当時未解決であった。

２．研究の目的

本研究は、(1)Selberg 類内における直交性、零点分布、値分布の相関性の解明(2)多重ゼータ関数の値分布の調査の２つを目的とし、以下の５つの研究項目を実施する。①Steuding 予想の証明に取り組む。②各数論的ゼータ関数について、複素零点ρにおける Euler-Zagier 和の値 Z(ρ,ρ)全体の分布を計算し、異なるゼータ関数間の分布状況を比較する。③Steuding 予想を算術パラメーター(Dirichlet 指標、保型形式)化し証明。その代数的意味を考察する。④Steuding 予想を多重化、即ち３個以上のゼータ関数について同様の値分布の独立性が成り立つかを考察する。⑤項目①②④を達成することで、Selberg 類内での関係「直交性 ⇒ 値分布、零点分布の独立性」が確認される。逆の関係「値分布、零点分布の独立性 ⇒ 係数和評価」が成立するかどうかを考察する。

３．研究の方法

(1)平成 25 年度の実施計画

報告者が発案した定符号正密度法を用いることで、２つの保型Ｌ関数間の同時普遍性定理が証明される（論文①）。この手法を拡張させることで、研究項目①④についての研究が大きく進展するだろうと当初は考えていた.

(2)平成 26 年度以降の実施計画

研究項目②③⑤に関する研究に主に取り組む予定であった。

４．研究成果

(1) Steuding 予想に関する取り組み

① Steuding 予想

まず予想の詳細を述べる。数論的ゼータ関数とは、級数 $L(s)=\Sigma a(n)n^{-s}$で定義される複素関数で,素数についての無限積表示（Euler 積）,関数等式を初めとした解析的性質をもつものである．A.Selberg は数論的ゼータ関数全体の集合「Selberg 類」を考案し、Selberg 類内でゼータ関数の直交性が成り立つこと、即ち、2 つのゼータ関数 $L_j(s)=\Sigma a_j(n)/n^s (j=1,2)$に対し、係数積の和$\Sigma a_1(p)a_2(p)$（p は素数）に対する評価式が成り立つと予想している（Selberg 予想）。この予想は現在も未解決だが正しいと考えられている。Steuding は Selberg 予想を仮定すると、２つの異なるゼータ関数 $L_j(s) (j=1,2)$に対し、同時普遍性「帯領域 $D=1/2<\sigma<1$ 上の任意の正則関数 $f_j(s) (j=1,2)$に対し、適当な実数τが存在し、各 $f_j(s)$は $L_j(s+i\tau)$により同時に D 上一様近似できる」が成り立つと予想している。

② 本取り組みに関する成果

報告者が発案した定符号正密度法を用いることで、２つの正則 Hecke 固有形式に付随するゼータ関数（Riemann zeta 関数含む）の組に対する同時普遍性定理が証明される（雑誌論文①）。この手法を拡張し、以下の３つの結果が得られた。

(i)実係数ゼータ関数に対する同時普遍性

正則 Hecke 固有形式に付随するゼータ関数の特徴として、(a)係数が必ず実数になること(b)p-th 係数 a(p)が十分小さいことが挙げられる。Selberg 類に属す一般ゼータ関数についても、条件(a)(b)を両方満たすものに対しては、容易に同時普遍性を証明することができる。私は更に名越弘文氏（群馬大学）の協力を得ることで、条件(a)のみを仮定しても同時普遍性が成立することを証明した。同結果についての論文は雑誌 Acta Mathematica Hungarica に投稿中である（掲載未定)。

(ii)Steuding 予想の解決

実係数の符号は正､負の２種類のみである。係数の平均評価（直交性）から導かれる「p-th 係数が正になる素数、負になる素数がどちらも正の密度で存在する」という簡単な事実に

着目し、得られたのが定符号正密度法である。ところが複素係数の場合にも、直交性を用いることで、「p-th 係数の偏角の変動域が 0 以上π未満、-π以上 0 未満になる素数がどちらも正の密度で存在する」というより一般的な事実が導かれる。報告者はこの事実に沿うように定符号正密度法を拡張し、複素係数をもつような任意の 2 個のゼータ関数に対しても同時普遍性が成立すること、即ち、Steuging 予想が成立することを証明した。

(iii)3 個のゼータ関数間の同時普遍性

2 個の数論的ゼータ関数

$L_j(s)=\Sigma a_j(n)/n^s (j=1,2)$

の同時普遍性は係数の積 $a_1(p)a_2(p)$が正、負の値を取るような素数 p がどちらも正の密度で存在するという事実から定符号正密度法を用いて証明される。3 個のゼータ関数、例えば、$L_1(s)$、$L_2(s)$と Riemann zeta 関数ζ(s)間の同時普遍性を定符号正密度法で証明するためには、「係数の組($a_1(p)$,$a_2(p)$)の符号分布が、正正、正負、負正、負負の 4 通りすべてについて正の密度をもつ」という一種の符号分布の独立性が必要となる。報告者は L_1,L_2 を正則 Hecke 固有形式に付随するゼータ関数に制限するならば、既に知られていた係数の 4 乗平均評価式を用いることで符号分布の独立性が得られることに気付き、ζ(s),$L_1(s)$,$L_2(s)$間の同時普遍性を得ることに成功、2013 年に報告した（学会発表③）。

一方、この取り組みは、報告者の手法の限界を示すものでもあった。係数の直交性とは係数の１乗平均評価、２乗平均評価の組である。3 個以上のゼータ関数の符号分布の独立性を示すには、係数の６乗平均評価、つまり直交性よりもずっと強い条件が必要となる。本研究の出発点である「直交性と同時普遍性（値分布）の相関性」という観点から見て、研究手法を１から見直さなければならないと感じた。

③　多重 Steuding 予想の解決

平成 26 年 3 月,当時名古屋大学多元数理科学研究科に在籍していた Lukas Pankowski 氏から Pankowski 氏,中村隆氏（東京理科大学),Yoonbok Lee 氏の 3 人による共著論文(引用文献 1）を受け取った。この論文の中で彼らは多重 Steuding 予想を肯定的に解決することに成功した。彼らの手法は直交性（1 乗平均評価と 2 乗平均評価）のみを用いる簡潔な手法であった。

彼らの手法の応用性の高さに着目し、本研究項目の発展として新たに”多重 Steuding 予想の算術化“、ならびに”符号分布の独立性”の 2 つの研究項目に取り組んでいる。

(2) 複素零点虚部をパラメーターとした値分布の研究

①　出発点となった結果

有名なリーマン予想は Riemann zeta 関数ζ(s)の複素零点は全て臨界線σ=1/2 上に存在するというものである。リーマン予想を仮定すると、ζ(s)の全ての複素零点は 1/2+iγ（γは実数）という形で表される。報告者はγに関する Landau の評価式に着目し、次の２つの結果を得た（引用文献 2）：

(a) 任意のδ>0 に対し、σ>1，零点虚部γを動かしたときのζ(σ+iδγ)が取る値全体の集合は複素平面で稠密となる。
(b) 領域 D 上、ζ(s+iγ)について普遍性が成り立つ。すなわち、任意の正則関数 f(s)に対し、ζ(s+iγ)が f(s)を D 上一様近似するような虚部γは正の密度で存在する。

この２つの結果を結びつけると、”任意のδに対し、γをパラメーターとしたときのζ(s+iδγ)の挙動について同時普遍性が成立する“という予想が考えられる。特にδ=2 に対しこの予想が成立するならば、基本的な多重ゼータ関数である Euler-Zagier 和 Z(u,v)について、Z(1/2+iγ,1/2+iγ)の値分布の一様性が成立する。報告者はこの予想の解決に向け研究に取り組んだ。

②　得られた結果

報告者はδが１以下の正数ならば予想が成立することを証明した。一方、δ>1 の場合、計算上の問題が生じ、その解決には Landau の評価式の誤差項をより精密に評価する必要があることを発見した。この課題については、平成 28 年度基盤研究(C)においても継続して取り組んでいる。また、同結果については平成 28 年 9 月にリトアニアで開催される研究集会において発表する予定である。

(3) 同時普遍性定理の算術パラメーター化

①　Dirichlet L 関数の同時普遍性

Bagchi の同時普遍性定理はχ_j(1≦j≦r)を互いに異なる指標としたとき、与えられた正則関数 $f_j(s)$に対し、Dirichlet L 関数の垂直方向への平行移動 L(s+iτ, χ_j)が $f_j(s)$を同時に近似するような実数τが存在するというものであった。報告者と名越氏はこの結果を算術パラメーター化し、L(s, χ_j・λ)が $f_j(s)$を同時に近似するような指標λが無数に存在することを証明した。この結果についての論文を雑誌 Monatshefte fur Mathematik に投稿、条件付掲載決定となっている。

②　実指標への制限

報告者と名越氏は上記結果が Dirichlet 指標を実指標に制限しても成り立つことを証明した。即ち、χ(d_j)(1≦j≦r)を相異なる判別式に付随する実指標としたとき、与えられた正則関数 $f_j(s)$に対し、L(s, χ(d_j・d))が $f_j(s)$を同時に近似するような判別式 d が無数に存在することを証明した。この同時普遍性と Dirichlet の類数公式を結びつけるこ

とで、2 次体の類数分布について、多次元一様性が成り立つことも証明できる。同結果については、学会発表②を行った。また論文を雑誌 Acta Mathematica Hungarica に投稿中である（掲載未定）。

(4) 補足
研究成果とは言い難いが、雑誌論文②に対し、日本数学会より“第６回 JMSJ 論文賞”を授与したことをここに報告しておく。

〈引用文献〉

1． Y. Lee, T.Nakamura and L.Pankowski, ”Selberg's orthonormality conjecture and joint universality of L-functions”, preprint.

2． 見正秀彦，講演「Riemann zeta 関数と Euler-Zagier 和の離散的値分布」，日本数学会代数学分科会，東京理科大学，2012 年 3 月発表.

3． J.Steuding, Value-Distribution of L-Functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol.1877, Springer, 2007.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 見正秀彦,“Joint universality theorems for pairs of automorphic zeta functions”, Mathematische Zeitschrift, 査読有, Vol.277, 2014, pp.1113-1154.

② 見正秀彦,“Functional distribution for a collection of Lerch zeta functions”, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol.66, No.4, 2014, pp.1105-1126.

〔学会発表〕（計３件）

① 見正秀彦, 特別講演「ゼータ関数の普遍性の概要」, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会代数学分科会, 広島大学（広島県東広島市), 2014 年 9 月 25 日発表.

② 見正秀彦－名越弘文, 一般講演「実指標 Dirichlet L 関数間の同時 d - 普遍性と類数たちの多次元稠密性」, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会代数学分科会, 広島大学（広島県東広島市), 2014 年 9 月 25 日発表.

③ 見正秀彦, "A new method to prove joint universality for zeta functions", Palanga Conference in Combinatrics and Number Theory, パランガ（リトアニア）, 2013 年 9 月 2 日発表.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
見正　秀彦　（Mishou Hidehiko）
東京電機大学・情報環境学部・准教授
研究者番号：10435456

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：