様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 5 月 11 日現在

機関番号：11101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：25800032

研究課題名（和文）同次元間安定写像上の2,3次元閉多様体の復元と埋め込み，はめ込みリフトの分類

研究課題名（英文）Reconstruction of 2 and 3-dimensional closed manifolds by equi-dimensional stable maps and classification of embedding or immersion lifts

研究代表者
山本　稔（Yamamoto, Minoru）

弘前大学・教育学部・准教授

研究者番号：40435475

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：向き付けられた3次元閉多様体から3次元空間への安定折り目写像の構成と，4次元空間へのはめ込みリフトを中心に研究を行った．研究成果は次のとおりである．(1):レンズ空間L(p,1)から3次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が1つのトーラスからなるものを構成した．(2):(1)で構成した3次元球面からの安定折り目写像を4次元空間へはめ込みリフトし，これが向き付けられた3次元閉多様体から4次元空間へのはめ込みのコボルディズム群の生成元になることを示した．

研究成果の概要（英文）：The research leader studied constructions of stable fold maps of closed oriented 3-dimensional manifolds to the 3-space and lifts of these stable fold maps to immersions to the 4-space. The research results are as follows. (1): The leader constructed stable fold map of the lens space L(p, 1) to the 3-space whose singularity set is a torus. (2): The leader showed that an immersion lift of the stable fold map of the 3-sphere which was constructed in (1) to the 4-space is a generator of the cobordism group of the closed oriented 3-dimensional manifold to the 4-space.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：安定折り目写像　はめ込み

１．研究開始当初の背景

3 次元空間内の物体を観測するとき，観測者は網膜に映った物体の像，特に輪郭線に注目する．トポロジーの観点からこのことを解釈すると，平面など値域多様体上に現れる安定写像の輪郭を用いて，曲面などの定義域多様体を調べることになる．

研究代表者はこれまで，閉曲面間の折り目写像の特異点集合の連結成分数についての研究，閉曲面から平面への安定写像を 4 次元空間への埋め込みリフトに関する研究，円周からの Morse 関数を境界付き曲面から平面へのはめ込みに拡張リフトする研究など，曲面間の安定写像とそのリフトに関する研究を中心に行ってきた．

また，2010 年度から名古屋工業大学の平澤美可三氏と，2 次元球面の裏返しを平面へのジェネリックホモトピーの 3 次元空間への正則ホモトピーへのリフトという観点で共同研究を行った．これはホモトピーにおける写像の変化を積み重ねることで，ジェネリックホモトピーは 2 次元球面と単位区間の直積から３次元空間への写像と，正則ホモトピーは 4 次元空間への写像と解釈でき，3 次元多様体間の安定写像と 4 次元空間へのはめ込みリフトの研究に繋がることがわかる．

２．研究の目的

1 で述べた背景を踏まえ，次の 2 点を研究の目的とした．

(1) 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定写像に対し，3 次元空間内の輪郭面から，3 次元閉多様体や安定写像の復元をし，3 次元閉多様体について輪郭面を用いて視覚化すること．

(2) 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定写像に対し，4 次元空間への埋め込み，はめ込みリフトの構成をする．さらに埋め込みリフト全体を安定写像を保つアイソトピーで分類，はめ込みリフト全体も同様に，安定写像を保つ正則ホモトピーで分類すること．

３．研究の方法

(1) 3 次元空間内の輪郭面から 3 次元閉多様体や安定写像を復元する研究については以下の方法をとる．特異点集合の近傍での安定写像の振る舞いは局所座標表示から分かっている．一方，安定写像を正則点の閉包に制限した写像は境界付き 3 次元多様体から 3 次元空間へのはめ込み写像となっている．与えられた閉曲面から 3 次元空間へのはめ込み写像を境界付き 3 次元多様体からのはめ込み写像に拡張する研究は Pappas 氏（1996 年）によって行われているため，Pappas 氏の手法を学ぶことにより，輪郭面から 3 次元閉多様体と安定写像を復元する手段を考察する．

(2) 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定写像に対し，4 次元空間への埋め込み，はめ込みリフトの構成する研究については以下の方法をとる．はめ込みリフトの存在については Blank 氏,Curly 氏（1980 年）による研究がある．一方，閉曲面から平面への安定写像の 3 次元空間への埋め込みリフトの存在については Luminati 氏（1994 年）が研究している．そこで Luminati 氏の手法を学ぶことで，埋め込みリフトの構成について研究する．

次に埋め込みリフト全体を，安定写像を保つアイソトピーで分類，はめ込みリフト全体を，安定写像を保つ正則ホモトピーで分類する研究については次の手法をとる．研究代表者によって閉曲面から平面への安定写像の 3 次元空間へのはめ込みリフトについての分類が行われているため，この結果を次元を 1 つあげて拡張する形で，はめ込みリフトの安定写像を保つ正則ホモトピーによる分類を行う．一方，Bellettini 氏，Beorchia 氏，Paolini 氏（2012 年）により閉曲面から平面への安定写像の埋め込みリフトを分類するためのアイソトピー不変量に関する研究がある．そこでこの場合も 3 氏の手法を拡張する形で，まずはアイソトピー不変量を構成し，その後でより精密な分類を行うという手法をとる．

４．研究成果

(1) 3 次元多様体間の安定写像の復元に関する研究として，レンズ空間 L(p,1)から 3 次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が 1 つのトーラスからなるものを具体的に構成した．

まず，3 次元球面については，平澤美可三氏との共同研究（[雑誌論文]①）で得られた 2 次元球面の裏返しを元に，L(1,1)から 3 次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が 2 つの 2 次元球面からなるものを構成した．
次に 3 次元射影空間については，2 次元射影平面の twisted I-bundle の 3 次元空間へのはめ込み写像を構成し，それを詳しく観察することにより，L(2,1)から 3 次元空間への安定折り目写像で特異点集合が 2 つの 2 次元球面からなるものを構成した．これらを元にして，一般の L(p,1)から 3 次元空間への安定折り目写像で特異点集合が 2 つの 2 次元球面からなるものを構成した．

上記で得られた安定折り目写像を変形することで，目的のレンズ空間 L(p,1)から 3 次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が 1 つのトーラスからなるものを構成した．
Eliashberg 先生により（1970 年），向き付けられた 3 次元閉多様体のヒーガード分解に対してヒーガード曲面を特異点集合とする 3 次元空間への安定折り目写像の存在は知られている．今回の結果は，その具体例を L(p,1)

の種数１のヒーガード分解に対して構成したことを意味する．3 次元多様体は様々な観点から研究されている対象であるが，写像を用いて具体的に表示するということはほとんどされていない．そのため，今回の研究が 3 次元多様体の写像を用いた可視化に繋がることが期待される．

また，安定折り目写像を変形して，特異点集合を変形する操作は，閉曲面から平面への安定折り目写像については Eliashberg 先生の論文に具体的な構成法が与えられていたが，3 次元以上では「同様にして」としか述べられていなかった．今回の構成によって，3 次元の場合で，特異点集合を連結な閉曲面に変形する具体的な方法も得られた．

今後はレンズ空間 L(p,q)の種数１のヒーガード分解に対応した安定折り目写像やその他の向き付けられた 3 次元閉多様体から 3 次元空間への種数 g の安定折り目写像を具体的に構成し，写像を通した 3 次元多様体の可視化をさらに進めてゆく計画である．

なお，この研究成果については[学会発表]①②④で報告した．

(2) 3 次元多様体間の安定写像のはめ込みリフトの研究として，(1) で構成した向き付けられた 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定折り目写像とその 4 次元空間へのはめ込みリフトについて考察した．

まず，3 次元球面から 3 次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が 2 つの 2 次元球面からなるものと，1 つのトーラスからなるものが折り目コボルダントになることを，具体的に写像を構成することで示した．

次に 2 つの 2 次元球面が特異点集合となるような安定折り目写像を，Akhmetiev 先生が pellicular と呼んでいる形で，4 次元空間へはめ込み写像にリフトさせた．一方で Hughes 先生は 2 次元球面の裏返しから構成した 3 次元球面から 4 次元空間へのはめ込み写像がはめ込み写像のコボルディズム群の生成元になることを示した（1992 年）．そこで，pellicular な形で 4 次元空間にリフトしたはめ込み写像が Hughes 先生が構成したはめ込み写像とはめ込みコボルダントになることを具体的に示した．

平戸先生，高瀬先生によって，向き付けられた 3 次元閉多様体から 3 次元空間への折り目写像のコボルディズム群と 4 次元空間へのはめ込み写像のコボルディズム群は同型であり，さらにこれらは球面の 3 次元の安定ホモトピー群に同型であることが知られている（2012 年）．そのため，球面の 3 次元の安定ホモトピー群の生成元を，3 次元球面から 3 次元空間への種数 1 のヒーガード分解に相当する安定折り目写像で構成できたことになる．

今後は (1) で構成したレンズ空間 L(p,1)（p は 2 以上）からの種数 1 のヒーガード分解に対応する安定折り目写像が上の 3 次元球面からの安定折り目写像に折り目コボルダントであるか確かめ，向き付けられた 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定折り目写像を用いた，4 次元空間への正則ホモトピー類の研究に発展させる計画である．

(3) 2 次元多様体間の安定写像の変形とそのはめ込みリフトの変形に関して，2010 年度から 2013 年度にかけて平澤美可三氏と 2 次元球面の裏返しに関する共同研究を行なった．

Smale 氏は 2 次元球面から 3 次元空間へのはめ込み写像は全て正則ホモトピックであることを証明した（1958 年）．これは 3 次元空間に埋め込まれた 2 次元球面は正則ホモトピーによって裏返せることを意味している．Smale 氏の証明は h-principle を用いるものであったため，その後，Phillips 氏，Max 氏，Francis 氏，Thurston 氏などが 2 次元球面の裏返しの様子を図示した．

今回，平澤氏との共同研究では，2 次元球面から平面へのジェネリックホモトピーが 3 次元空間への正則ホモトピーにリフトするための必要十分条件を用いた．即ち，まずは 2 次元球面から平面へのジェネリックホモトピーで 3 次元空間への正則ホモトピーにリフトするものを構成し，その正則ホモトピーが 2 次元球面の裏返しに相当することを確かめた．

その後，Francis 氏が構成した 2 次元球面の裏返し（1987 年）と，私たちが構成したものが非常に似ていることが判明した．そこで両者の関係について議論するため，2014 年度に Francis 氏を訪問した．

議論の結果，Francis 氏による方法と私たちの方法の本質部分は同一であるものの，Francis 氏は正則ホモトピーの平面への直交射影として 2 次元球面の裏返しを図示しているため，私たちの手法は，ジェネリックホモトピーのリフトという観点で新しいことが分かった．また，Francis 氏の図示の仕方は 2 次元球面の一部に穴を開けて描く方法であるため，はめ込まれた 2 次元球面上に現れる 2 重点集合が見えなくなっている．その一方で，私たちの図示の仕方は，はめ込まれた 2 次元球面の全体像をいくつかのピースに分けて表示する方法であるため，2 重点集合も全て図示されている．これより，裏返しにおいて，平面上に投影した時の輪郭の変化の様子と 3 次元空間内の 2 重点集合の変化の様子が同時にきちんと追いかけられる所に私たちの構成法の特徴があることが分かった．

この研究成果は[雑誌論文]①で 2017 年に出版された．今後は 2 次元球面以外の 2 次元閉曲面から平面へのジェネリックホモトピーを用いて 3 次元空間への正則ホモトピーを構成することを計画している．

(4) 同次元間の安定写像ではないが，関係する研究として，3 次元多様体から平面への安定写像に関して，2015 年度から 2016 年度

にかけて秋田大学の小林真人氏と 3 次元射影空間から平面への安定写像の構成に関する共同研究を行なった．

3 次元射影空間は対称性を用いて，正四面体への自然な写像をもつ．また正四面体から平面への写像として 2 種類の射影をもつ．写像の合成より，3 次元射影空間から平面への写像を 2 種類得る．特異値集合は 3 次元射影空間内の 1 次元射影直線の像を現し，2 次元射影平面の平面像も同時に読み取れる．そのため，この写像は 3 次元射影空間の幾何構造をよく表した写像であると言えるが，安定写像になっていない．即ち写像空間の中では退化した写像になっている．

そこで私たちはこの退化した写像それぞれを変形することで，3 次元射影空間から平面への安定写像を 2 種類構成した．特異値集合の対称性や中心ファイバーの近傍の様子を観察することで，1 つの安定写像からは 3 次元射影空間を 4 つのソリッドトーラスに分解する様子と，種数 5 のヒーガード分解を持つ様子が読み取れ，もう 1 つの安定写像からは 3 次元射影空間を 3 つのソリッドトーラスに分解する様子と，種数 4 のヒーガード分解を持つ様子が読み取れることを示した．

この研究成果は[雑誌論文]②で 2017 年に出版された．今後は 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定写像を用いて，定義域多様体の骨格をなす部分多様体と安定写像の特異値集合の関係を調べる計画である．

（5）今回の研究課題と直接の関係はないが，2015 年度に弘前大学の田中義久氏とベキ乗の和をベキ乗の交代和で表す関係式に関する共同研究を行なった．

自然数の和（三角数）が自然数の 2 乗の和（四角錐数）の交代和で表す式が知られている．そこで，私たちはこの関係式を 2 つの方法で高次元化した．1 つの方法は，三角数の和を四角錐数で表す関係式と見て，m 次元単体数を m 次元四角錐数の交代和で表すという図形数の関係式としての高次元化をした．もう 1 つの方法は，自然数の和を自然数の 2 乗の和の交代和で表す関係式と見て，ベキ乗の和をベキ乗の交代和で表すという高次元化をした．2 つ目の高次元化においては，ベキ乗の交代和の係数にベルヌーイ数が現れることを示した．

この研究成果は[雑誌論文]③で 2016 年に出版された．研究代表者の元々の課題である安定写像の研究には今の所結びつきは見つからないが，ベルヌーイ数は円周からの Morse 関数の分類にも現れる数である．そのためベキ乗の交代和についてもどこかで安定写像の分類と結びつく可能性があるため，引き続き研究を行ってゆく計画である．

今回の研究期間では 3 次元閉多様体から 3 次元空間への安定折り目写像の構成に時間がかかってしまったため，当初，研究の目的としていた，安定写像の 4 次元空間への埋め込みリフトの構成と分類まで到達することが出来なかった．これらについては今後の課題として研究を行う計画である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）

① Mikami Hirasawa, Minoru Yamamoto, Sphere version from the viewpoint of generic homotopy, Topology and its Applications, 査読有, 223, 2017, pp.13-29,

② Mahito Kobayashi, Minoru Yamamoto, Views of real projective 3-space by stable maps into the plane , Experimental Mathematics, 査読有, 26, 2017, pp.138-152.

③ 田中　義久, 山本　稔, 三角数の交代和による表示と高次元化, 日本数学教育学会誌数学教育 70-2, 査読有, 98, 2016, pp.3-10.

④ Minoru Yamamoto, On embedding lifts over a Morse function on a circle, RIMS 講究録別冊, 査読有, B38, 2013, pp.31-43.

〔学会発表〕（計　5　件）

① Minoru Yamamoto, Construction of fold map of lens space L(p,1) where singular set is a torus, Singularity theory of differential maps and its applications, 2016 年 12 月 7 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).

② 山本　稔, 3 次元閉多様体から 3 次元空間への折り目写像の構成について, 特異点の大域的研究, 2016 年 6 月 24 日, 兵庫教育大学神戸ハーバーランドキャンパス（兵庫県・神戸市).

③ Minoru Yamamoto, Stable fold maps of oriented 3-manifolds to 3-space（ポスター発表), Singularities in Generic Geometry and its applications -Kobe-Kyoto 2015 (Valencia IV)--, 2015 年 6 月 5 日, 神戸大学百年記念館六甲ホール（兵庫県・神戸市).

④ 山本　稔, トーラスを折り目とする 3 次元球面から 3 次元空間への折り目写像の構成法について, 多様体のトポロジーの展望, 2014 年 11 月 29 日, 東京大学大学院数理科学研究科（東京都・目黒区).

⑤ 山本　稔, Extension of immersed circles in the plane to a surface (Introduction of the works of Blank and Francis), Kobe Studio Seminar for Studies with Renderman, 2014年10月25日, 神戸大学発達科学部（兵庫県・神戸市).

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://siva.cc.hirosaki-u.ac.jp/usr/minomoto/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者

山本　稔（YAMAMOTO Minoru）
弘前大学・教育学部・准教授
研究者番号：40435475