

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800033

研究課題名(和文) 離散群のグラフへの作用と群上の距離の研究

研究課題名(英文) Study on actions of discrete groups on graphs and metrics on groups

研究代表者

見村 万佐人(Mimura, Masato)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：10641962

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：生成系の元の個数 k を固定したとき、適切な意味で「 k 元生成群全体のなす空間」には距離付け可能なコンパクト位相が自然に入る。この位相での有限群の無限列の境界(集積点全体の集合)に属する群の群論的性質と、有限群の無限列の粗い幾何的な性質の間に対応を与えた。また、Kazhdanの性質(T)に付随するKazhdan定数と呼ばれる数量はこの位相空間上の関数と思えるが、これを一般の距離空間上の固定点性質に付随する数量(関数)に拡張し、適切な条件の下でこの関数が上記の位相での収束に関し下半連続であることを示した。

研究成果の概要(英文)：For a fixed positive integer k , "the space of k -generated group" in certain sense is equipped with a natural topology that is metrizable and compact. For an infinite sequence of finite k -generated groups, we establish correspondence between group property of elements in this topological space appearing as an accumulation point and coarse geometric property of the infinite sequence. Moreover, we study on generalization of the Kazhdan constant, which is associated with Kazhdan's property (T). This quantity may be seen as a function on the space of k -generated group. We generalize it to a general setting of fixed point property on a metric space, and under certain condition we prove that the defined function is lower semi-continuous with respect to the convergence in the aforementioned topology.

研究分野：幾何学

キーワード：離散群 剛性 エクスパンダー 粗い幾何

1. 研究開始当初の背景

有限生成離散群を有限生成系から定まるケーリーグラフへの自身の作用を通じて研究するというのが幾何学的群論の基本的な考え方である。さらに、剰余的有限群に対しては、有限商群への作用を可算無限個考えることができる。このようにして、無限群の1つのケーリーグラフ、ないしは、可算無限個の有限群のケーリーグラフの距離幾何的な性質を調べることは群の性質の理解にとって大変重要である。特に、先行研究で、後者の場合に剰余有限群の群的な性質と可算無限個のケーリーグラフの列の粗い幾何での性質の対応が知られていた。

2. 研究の目的

1つは、剰余有限群でいられていた前項の対応を、一般の生成系の個数を固定した有限群の可算無限列の場合に拡張することである。さらに、Shalom らにより知られていた Kazhdan の性質(T)の「 k 元生成群のなす(コンパクト)空間」上での開性質の結果の定量化や一般の距離空間への一般化を行なうことを目的とした。

3. 研究の方法

前項のように、自然数 k を固定したとき、「 k 元生成群のなす空間」には自然に距離付け可能でコンパクトな位相が入る(Grigorchuk により定義され、ケーリー位相などと呼ばれる)。この位相は点列コンパクトであるため、 k 元生成群の無限列に対し、その集積点全体のなす集合は空でないコンパクト集合をなす。例えば、剰余有限群の有限商群(生成系はもとの群の固定した生成系の射影による像をとる)全体の集合の集積点の集合はもとの群(もとの生成系が付随している)のなす1点集合となる。この枠組みで、剰余有限群に対する研究を一般の k 元生成有限群の無限列に対する研究に一般化できる。

性質(T)の研究に関しては、有限生成群で(T)がヒルベルト空間上の等長作用の固定点性質と同値であることを用い、作用の変位を用いて Kazhdan 定数を読み替えることで一般の距離空間上の等長作用の場合に拡張するというのが主なアイデアである。

4. 研究成果

k 元生成群の有限群の可算無限列に対する粗い幾何に関しては、「Yu の性質 A」・「束化された粗い埋め込み」・「幾何的な性質(T)」の3つの性質に対し、ケーリー位相での無限列の集積点の集合(これを「ケーリー境界」と名づけた)の群性質と対応させた。これは基本的に酒匂宏樹氏(新潟大)との共同研究である。雑誌論文の[2]は、この一部である。特に、「ヒルベルト空間に束化された粗い埋め込みをもつという性質が有限個の直積で閉じているか」という Yu の問題を否定的に解決した。

バナッハ空間に対する有限グラフのエクスペンダー性は粗い幾何で非常に重要な概念である。有限グラフを適切な操作により群

に付随するシュライアグラフに帰着させる、という方針で群論を用いて、バナッハ空間ターゲットのエクスペンダー性に対する補外法を示した。雑誌論文の[1]である。

Kazhdan 定数に関しては、これを距離空間ターゲットの枠組みの「距離 Kazhdan 定数」に拡張し、これを k 元生成群のなすケーリー位相空間上の関数と思ったとき、適切な弱い仮定の元でこれが下半連続であることを示した。これは、2.の Shalom の結果の定量化かつ一般化を与える。

最後に、研究開始当初は想定していなかった成果として、固定点性質を部分的なそれから示す新しい手法(intrinsic upgrade)を創始した。このような手法で有名なものは Shalom による「有界生成」(bounded generation)を用いるものだが(1999, Publ. I.HES), この仮定が強すぎるのが適用上のネックとなっていた。今回、有界生成の仮定を完全に取り外すことに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5件)

以下全て査読有り。

[1] M.Mimura, Sphere equivalence, Banach expanders, and extrapolation, Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol. 2015, 4372--4391, 2015, doi: 10.1093/imrn/rnu075

[2] M.Mimura, N.Ozawa, H.Sako and Y.Suzuki, Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, III: Geometric property (T), Alg. and Geom. Topol., 15 (2015), no.2, 1067--1091, doi: 10.2140/agt.2015.15.1067

[3] M.Mimura, Multi-way expanders and imprimitive group actions on graphs, Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol. 2016 no. 8, 2522-2543, 2016, doi: 10.1093/imrn/rnv220

[4] T.de Laat, M.Mimura and M.de la Salle, On strong property (T) and fixed point properties for Lie groups, Annal. Inst. Fourier, 66 (2016), 1859-1893, doi: 10.5802/aif.3051

[5] M.Mimura, Superrigidity from Chevalley groups into acylindrically hyperbolic groups via quasi-cocycles, J. Eur. Math. Soc., 掲載確定。

[学会発表](計 20)

以下全て招待講演。

[1]から[12]までは国際研究集会。[13]から[20]は国内研究集会。

[1] M.Mimura, 2013年7月17日, Sphere equivalence and Banach expanders, Summer School on Non-commutative Geometry and Operator Algebras, Shanghai, 中国

[2] M.Mimura, 2014年6月9日, Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, part II: fibered coarse embeddings, International Conference on Banach methods in Noncommutative Geometry, Wuhan University, 中国

[3] M.Mimura, 2014年7月23日, Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, Geometric and Asymptotic Group Theory with Applications 8 (GAGTA8), University of Newcastle, オーストラリア

[4] M.Mimura, 2014年8月10日, Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, ICM satellite conference "Geometry on Groups and Spaces", KAIST, 韓国, 基調講演

[5] M.Mimura, 2014年10月31日, Group approximation in Cayley topology and coarse geometry: Fibered coarse embeddings, Conference on Geometric Functional Analysis and its Applications, Universite de Franche-Comte, フランス

[6] M. Mimura, 2016年7月5日, Strong algebraization of fixed point property, Metric spaces: Analysis, Embeddings into Banach Spaces, Applications, Texas A&M 大学, アメリカ

[7] M. Mimura, 2016年7月26日, Synthesis in Property (T): The Part and the Whole 1, Rigidity School 2016, 名古屋大学, 基調・連続講演

[8] M. Mimura, 2016年7月26日, Synthesis in Property (T): The Part and the Whole 2, Rigidity School 2016, 名古屋大学, 基調・連続講演

[9] M. Mimura, 2016年7月26日, Synthesis in Property (T): The Part and the Whole 3, Rigidity School 2016, 名古屋大学, 基調・連続講演

[10] M. Mimura, 2016年7月26日, Synthesis in Property (T): The Part and the Whole 4, Rigidity School 2016, 名古屋大学, 基調・連続講演

[11] M.Mimura, 2016年12月8日, Superintrinsic synthesis in fixed point properties, Amenability, coarse embeddability and fixed point properties, MSRI, アメリカ

[12] M.Mimura, 2017年1月24日, Superintrinsic synthesis in fixed point properties, Property T and fixed point properties, パリ高等師範学校, フランス

[13] 見村万佐人, 2013年8月24日, 有限ケーリーグラフの多分割等周定数の間の普遍的不等式と、導かれる対称性, 第60回幾何学シンポジウム, 東京工業大学

[14] 見村万佐人, 2013年11月21日, Gaps between multi-way isoperimetries and imprimitive group actions on graphs, 多様体上の微分方程式, 金沢大学サテライトプ

ラザ

[15] 見村万佐人, 2014年6月19日, 多分割エクスペンダーとグラフへの非原始的な群作用, 第31回代数的組合せ論シンポジウム, 東北大学

[16] 見村万佐人, 2014年8月25日, Metric Kazhdan constants, 幾何学シンポジウム, 名城大学

[17] 見村万佐人, 2015年1月24日, 確証可能なエクスペンダー, 淡路島幾何学研究集会 2015, 国民宿舎 慶野松原荘

[18] 見村万佐人, 102.2015年8月29日, 有限生成群のなす位相空間と、有限群の無限列の粗い幾何, 第62回幾何学シンポジウム, 東京理科大学, 基調講演

[19] 見村万佐人, 103.2015年9月15日, Strong algebraization of fixed point properties, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会・幾何学分科会特別講演, 京都産業大学

[20] 見村万佐人, 2016年1月25日, Strong algebraization of fixed point properties, エルゴード理論と群論に関連した作用素環論における諸問題の研究(RIMS共同), RIMS, 京都大学

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~mimura-mas/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

見村万佐人 (Masato MIMURA)
(東北大学大学院理学研究科 助教)

研究者番号: 10641962

(2)研究分担者
なし。()

研究者番号：

(3)連携研究者
なし。()

研究者番号：

(4)研究協力者
なし。()