

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800034

研究課題名(和文) ボトルネック構造を持つ空間上の熱核と幾何学的不等式の研究

研究課題名(英文) Heat kernel and geometric inequalities on spaces with bottle-neck structure

研究代表者

石渡 聡 (Ishiwata, Satoshi)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：70375393

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：連結和は熱核がLi-Yau型評価を持たないことが古くから知られていた。2009年、Grigor'yan, Saloff-Costeは各エンドがnon-parabolicであるときに熱核のシャープな評価を得た。本研究では全てのエンドがparabolicである場合の熱核の評価の研究を行い、そのシャープな評価を得た。まず中心部分のon-diagonalな値は増大度が最も大きいエンドにより決定されることを明らかにした。これは増大度が最も小さいエンドにより決定されるnon-parabolicなエンドの場合と本質的に異なる挙動を持つことを示した新しい現象である。

研究成果の概要(英文)：Connected sums are known as manifolds without Li-Yau heat kernel estimate. In 2009, Grigor'yan and Saloff-Coste proved heat kernel estimates on manifolds with non-parabolic ends. In this research project, we obtain the heat kernel estimates on manifolds with parabolic ends. In particular, we proved that the on-diagonal value in the central part is determined by the maximal end, on the contrary to the case of manifolds with non-parabolic ends on which the on-diagonal value is determined by the minimal end. This shows that the heat kernel behavior on manifolds with parabolic ends are very different from that on manifolds with non-parabolic ends.

研究分野：幾何解析

キーワード：熱核

1. 研究開始当初の背景

非コンパクトリーマン多様体上の熱核の長時間挙動は、空間の大域的幾何構造と深い関係があり、確率論、調和解析など様々な観点から多くの研究者により研究が行われてきた。熱方程式の正值基本解として定義される熱核はユークリッド空間上ではガウス関数で与えられることは古くから知られている。Aronson は 1967 年、ユークリッド空間上の 2 階の一様楕円型 divergence form において熱核が上下からガウス型の関数で評価できることを示した。これはユークリッド空間の擬等長変換の下で熱核のガウス型評価 (Li-Yau 型評価) が安定であることを表している。Li-Yau は 1986 年、Ricci 曲率が非負である場合に Li-Yau 型評価が成り立つことを証明し、その後 Li-Yau 型評価の特徴づけの研究が盛んに行われるようになった。熱核の上からのガウス型評価については Sobolev の不等式、等周不等式、Nash との関係が古くから知られていたが、Grigor'yan は 1994 年の論文で Faber-Krahn の不等式と同値であることを示している。下からの評価も含めた Li-Yau 型評価は、Carlen, Davies, Fabes, Kusuoka, Moser, Stroock らの貢献と共に、1991 年、Grigor'yan と Saloff-Coste により最終的に、熱核の Li-Yau 型評価は Poincaré 不等式と体積 2 倍条件、Parabolic Harnack 不等式と同値であることが明らかとなり、様々な研究分野の中で現在でも重要な研究対象となっている。

一方、多様体の連結和に関しては 1976 年、Kuz'menko, Molchanov は 2 つの 3 次元ユークリッド空間の連結和上では強 Liouville 性が成り立たない、即ち定数でない有界な正值調和関数が存在することを示した。Parabolic Harnack 不等式は強 Liouville 性を導くので上記の同値条件を用いると熱核が Li-Yau 型評価を持たないことがわかる。その後連結和上の熱核の研究が行われるようになり、Benjamini, Chavel, Feldman は 1996 年、中心部分の熱核の値が一つのエンド上の評価よりもオーダーが小さくなるというボトルネック効果を明らかにした。これは上からの評価だけでシャープな評価ではなかったが、Grigo'yan, Saloff-Coste は連結和上の熱核評価を求めるプロジェクトを開始し、2009 年、多様体が non-parabolic な連結和の場合に熱核のシャープな評価を得た。

多様体上の離散的類似であるグラフ上のランダム・ウォークの長時間挙動についても様々な条件のもと研究が行われてきた。Kotani, Sunada は 2000 年、アーベル群が作用するグラフ (結晶格子) 上の対称ランダム・ウォークの長時間挙動を研究し、グラフを連続モデルであるユークリッド空間にうまく実現 (標準実現) し、時刻を無限大にすると同時にグラフをうまく縮めていくと、ランダム・ウォークが、Albanese 計量と呼

ばれるグラフから定義される計量を入れたユークリッド空間上のブラウン運動に収束させることができる、というタイプの中心極限定理を証明した。また、Sunada は 2006 年の連続講義の中で非対称ランダム・ウォークの局所中心極限定理を明らかにしている。

2. 研究の目的

上記のような背景のもとで、Grigor'yan, Saloff-Coste は連結和上の熱核評価の研究を共同で行い、hitting time や Dirichlet 熱核の評価などの補助的な結果を得た後、エンドが non-parabolic な連結和上の熱核の評価を得たが、本研究ではエンドが parabolic な連結和上の熱核評価およびその幾何解析的性質を明らかにすることが本研究の目的である。研究における問題点は連結和の中心部分における熱核の評価である。先行研究で扱われていた non-parabolic な多様体では中心部分を出発したブラウン運動がもとにもどってくる確率が小さく、比較的容易に求められるのに対し、parabolic な多様体では確率 1 で戻ってきてしまうため、他のエンドとの比較が難しい。また、多様体全体が parabolic であるので Doob の h 変換と呼ばれる測度の変換によって non-parabolic に変換する手法も使えない。

グラフ上のランダム・ウォークに関しては、Kotani, Sunada により得られていた結晶格子上の非対称ランダム・ウォークに関する結果のもとに、結晶格子上の非対称ランダム・ウォークの弱収束や、より精密な挙動の研究を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

連結和上の熱核評価に関しては関連書籍購入による基礎的知識獲得、関連研究会での専門家からのアドバイスとともに、研究協力者である Grigor'yan 教授、Saloff-Coste 教授との共同研究により研究を推進した。

ランダム・ウォークの長時間挙動に関しては関連書籍により基礎的知識獲得、関連研究会での専門家によるアドバイスとともに、研究協力者である小谷教授、河備教授との共同研究により研究を推進した。

4. 研究成果

上記の研究の結果、すべてのエンドが parabolic である連結和上において、熱核の Laplace 変換 (ラプラシアン) のレゾルベントを連結和の特徴を用いて最大値の原理を巧妙に用いることで良い評価を得ることができ、これにより熱核の中心部分の値の評価に成功した。この結果、熱核の中心部分の値は増大度が最も大きなエンドにより決定されるという結果を得た。これは non-parabolic の場合に得られていた増大度が最も小さいエンドにより決定されるという挙動と本質的に異なる挙動をもつことを示しており、多様体上の幾何解析の研究上重要な発見である。また、これを用いて off-diagonal な評価も求めた。これらの結果を総合すると、

critical, すなわち体積増大度が r^2 のオーダーを持つエンドが複数ある場合、ボトルネック現象が観察され、critical なエンドが1つ以下ならば、ボトルネック現象が起こらないということを示した。また、critical なエンドをもつ連結和では、2つの subcritical なエンド間の熱核の値の方が、中心部分の熱核の値よりも大きくなるという“反ボトルネック現象”というあたらしい現象が起こることも明らかにした。
グラフ上のランダム・ウォークに関しては、結晶格子上の非対称ランダム・ウォークの長時間漸近挙動についていくつかの新しい事実を明らかにした。

1つ目として、弱収束である推移作用素の2通りの収束を証明した。これはプロセスから平均を引いた値の挙動に関するもので従来の中心極限定理型の収束と考えられるものと、非対称ランダム・ウォークを対称なランダム・ウォークの摂動と考え、時刻無限大で対称となっていくパラメータつきランダム・ウォークの収束に関するもので、Durrettの本に関連する収束定理が述べられているタイプのものである。更に4次モーメントを評価することで、それぞれについてプロセスレベルの収束である invariance principle を証明した。

2つ目は Sunada により得られていた結晶格子上の非対称ランダム・ウォークの局所中心極限定理の結果の拡張として、twisted Laplacian の漸近挙動を計算することにより熱核の漸近展開を求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

[1]著者：S. Ishiwata, H.Kawabi, T.Teruya
論文題目：An explicit effect of non-symmetry of random walks on the triangular lattice
雑誌名：Mathematical Journal of Okayama University, 57 (2015), 129-148.
査読の有無：査読有り

[2] 著者：A.Grigor'yan, S.Ishiwata, L.Saloff-Coste
論文題目：Heat kernel estimates on connected sums of parabolic manifolds
雑誌名：Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (掲載予定)
査読の有無：査読有り

[3]著者：S.Ishiwata, H.Kawabi, M.Kotani
論文題目：Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices

雑誌名：Journal of Functional Analysis,
272 (2017) no.4, 1553-1624.

査読の有無：査読有り

[4] 著者：S.Ishiwata
論文題目：Can one observe a bottleneckness of a space from the heat distribution?
雑誌名：Science Journal of Volgograd State University Mathematics Physics (掲載予定)
査読の有無：査読有り

[5] 著者：石渡 聡, 河備 浩司, 小谷 元子
論文題目：結晶格子上の非対称ランダムウォークの中心極限定理
雑誌名：数理解析研究所講究録 1952 (2015), 30-37.
査読の有無：査読無し

[6]著者：S.Ishiwata, H.Kawabi, M.Kotani
論文題目：Asymptotic expansion of the transition probability for non-symmetric random walks on crystal lattices
雑誌名：数理解析研究所講究録 (掲載予定)
査読の有無：査読無し

[7]著者：石渡 聡, 河備 浩司, 難波 隆弥
論文題目：Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
雑誌名：数理解析研究所講究録 (掲載予定)
査読の有無：査読無し

[学会発表](計9件)

[1]講演者：Satoshi Ishiwata
講演題目：Heat kernel estimates on a connected sum along a joint with a capacity growth
学会名：Advances on Fractals and Related Topics
場所：香港中文大学
日時：2012年12月11日。

[2]講演者：Satoshi Ishiwata
講演題目：A central limit theorem for non-symmetric random walks on crystal lattices
学会名：Geometric Analysis seminar
場所：Bielefeld 大学
日時：2014年10月28日。

[3]講演者：Satoshi Ishiwata
講演題目：A central limit theorem for non-symmetric random walks on crystal lattices
学会名：Oberseminar Analysis, Geometrie und Stochastik
場所：Jena 大学
日時：2014年11月5日。

[4] 講演者 : Satoshi Ishiwata
講演題目 Long time behavior of the heat kernel on connected sums of parabolic manifolds
学会名 : Geometric analysis seminar
場所 : Bielefeld 大学 (ドイツ)
日時 : 2015 年 11 月 17 日.

[5] 講演者 : Satoshi Ishiwata
講演題目 : Asymptotic expansion of the transition probability for non-symmetric random walks on crystal lattices
学会名 : Spectral and Scattering Theory and Related Topics
場所 : 京都大学数理解析研究所
日時 : 2016 年 1 月 20 日.

[6] 講演者 : Satoshi Ishiwata
講演題目 : Heat kernel on connected sums of parabolic manifolds
学会名 : Analysis seminar
場所 : Cornell University (USA)
日時 : 2016 年 3 月 7 日.

[7] 講演者 : Satoshi Ishiwata
講演題目 : Heat kernel on connected sums of parabolic manifolds
学会名 : Heat Kernels and Analysis on Manifolds and Fractals
場所 : Bielefeld 大学 (ドイツ)
日時 : 2016 年 7 月 14 日.

[8] 講演者 : 石渡 聡
講演題目 : 連結和上の熱核評価
学会名 : 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 特別講演
場所 : 関西大学
日時 : 2016 年 9 月 17 日.

[9] 講演者 : Satoshi Ishiwata
講演題目 : Heat kernel estimates on manifolds with ends and their applications
学会名 : Dirichlet forms and their geometry
場所 : 東北大学
日時 : 2017 年 3 月 21 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号 : 70375393

(2) 研究協力者

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 50230024

河備 浩司 (KAWABI HITOSHI)

岡山大学・理学部・教授
研究者番号 : 80432904

Alexander Grigor'yan
ドイツ Bielefeld 大学教授

Laurent Saloff-Coste 教授
アメリカ Cornell 大学・教授