様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００３６

研究課題名（和文）収束群作用およびその深度に関する研究

研究課題名（英文）Convergence group actions and their depth

研究代表者
松田　能文（MATSUDA, Yoshifumi）

青山学院大学・理工学部・助教

研究者番号：６０５４９２９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：収束群作用に対して幾何学的有限な作用との近さを測る尺度である深度というパラメータを導入して研究した．研究期間中に他の研究者たちによって得られた結果に基づいて，深度が無限である収束群作用を持つ群が存在することが明らかになった．
群の不変生成という，非初等的な収束群作用を持つ群が満たさない性質についても研究した．トンプソン群Fを含む，直線の区分的線形同相写像のなすいくつかの群が不変生成であることが明らかになった．

研究成果の概要（英文）：We studied convergence group actions by introducing their depth, which measures their closeness to geometrically finite convergence group actions. Based on result obtained by other researchers in research period, it turned out that there exists a group which has a convergence group action of infinite depth.
We also studied invariable generation of groups. A group which has a nonelementary convergence group action is not invariably generated. We showed that certain groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line, such as Thompson group F, are invariably generated.

研究分野：数物系科学

キーワード：収束群作用　相対的双曲群　不変生成　トンプソン群

１．研究開始当初の背景

(1)収束群作用は，双曲空間の理想境界へのクライン群の作用を力学系的に一般化したものである．

その中で，幾何学的有限な収束群作用は群の相対的双曲性と密接に関係していることもあり，研究手法も豊富で盛んに研究されている．

一方，幾何学的無限な収束群作用は例こそ知られているものの研究手法が乏しく，現状では研究の進展が幾何学的有限な収束群作用に劣っている．

その状況下で，最近，幾何学的無限な収束群作用に注目が集まる出来事があった．Baker-Riley により，ある双曲群 G とその双曲部分群の組であって H から G への包含写像 H の境界から G の境界への写像に連続的に拡張しないという奇妙なものの例が構成された．このとき，構成された双曲群 G とその双曲部分群 H の組を考えて G の境界への G の作用を H に制限することにより，クライン群論など従来の方法では得られない幾何学的無限な収束群作用が得られた．

その後、研究代表者らは任意の非初等的な相対的双曲群が同様の作用を許容することを示した．

(2)研究代表者らは、任意の非初等的な相対的双曲群に対して，幾何学的無限な収束群作用が幾何学的有限な収束群作用の逆極限として得られることを示した。

一方、上記の Baker-Riley の構成から得られる収束群作用は幾何学的有限な収束群作用の逆極限として実現できない．

そこで，

「収束群作用に対して，幾何学的有限な収束群作用にどのくらい近いかを測る尺度として深度というパラメータを導入する」

という着想を得た．

具体的には，収束群作用の深度が０であることをその作用が幾何学的有限であると定義し，深度が n-1 以下の収束群作用の逆極限として実現される収束群作用の深度は n 以下であると定義する．

２．研究の目的

(1)様々な深度の収束群作用の構成

上で述べたことを整理すると，研究開始当初に分かっているのは，
深度が１の収束群作用及び深度が１より大きい収束群作用が存在する，
ということだけなので，様々な深度の収束群作用を構成する必要がある．
ここでは，主に以下の事項を扱う．

(1-1)深度が有限である収束群作用の構成
(1-2)深度が無限である収束群作用の構成

特に、(1-2)深度が無限である収束群作用の構成は，収束群作用を許容するが幾何学的有限な収束群作用は許容しない群を構成することにより達成する．

(2)深度が有限な収束群作用の性質

深度 n の収束群作用の性質を明らかにすることは深度 n+1 の収束群作用を構成する上でも重要である．ここでは，幾何学的有限な収束群作用の性質を念頭におき、主に以下の問に答える．

(2-1)深度が有限な収束群作用はグロモフ双曲空間の理想境界への作用として実現できるか？
(2-2)深度が有限な収束群作用を許容する連結な空間は局所連結か？

３．研究の方法

(1)自由群の収束群作用
テストケースとして自由群を扱う．
主に以下の事項を取り扱う．

(1-1)深度が有限な収束群作用の構成
(1-2)深度が有限な収束群作用のグロモフ双曲空間の理想境界への作用としての実現
(1-3)有限な深度の収束群作用を許容する連結な空間の局所連結性
(1-4)種々の幾何学的無限な収束群作用の深度の評価

このうち，(1-1)と(1-2)は相互に帰納的に進んでいくことが想定される．

(1-2)では，幾何学的有限な収束群作用が Groves-Manning により導入された添加空間と呼ばれるグロモフ双曲空間の理想境界への作用として実現されることを考慮して，その類似を考える．

(1-4)では，Baker-Riley の構成から得られる収束群作用などを扱う．

(2)一般の群の収束群作用

自由群のケースを踏まえて，一般の群を取り扱う．主に以下の事項を取り扱う．

(2-1)深度が有限な収束群作用の構成
(2-2)深度が有限な収束群作用のグロモフ双曲空間の理想境界への作用としての実現
(2-3)有限な深度の収束群作用を許容する連結な空間の局所連結性
(2-4)収束群作用を許容するが幾何学的有限な収束群作用は許容しない群の構成

このうち，(2-4) では Rips 構成を用いて，相対的双曲群の部分群であるがそれ自身は相対的双曲的になりえないものを構成する．

４．研究成果

(1)収束群作用の深度

①研究期間中に Das-Mj により，非初等的な収束群作用を持つがどのような真部分群の族についても相対的双曲群でない群が構成された．

このような群は幾何学的有限な収束群作用を許容しないので，上で与えられた収束群作用の深度は無限である．

これにより，深度が無限である収束群作用を持つ群が存在することが明らかになった．

一方，深度が有限である収束群作用と深度が無限である収束群作用の両方を持つ群は存在するか，という問題は今後の課題である．

②上で述べたような観察が得られたが，深度という尺度を導入して収束群作用たちを階層的に研究する，という方針に基づく研究で研究開始当初に期待されたほどの成果は得られなかった．

このことから，収束群作用たちを階層づける他の尺度を導入することが必要であると考えられる．

そのような尺度を構成する際に，収束群作用を持つ群のグロモフ双曲空間への作用を用いることが有用であることを示唆する結果が研究期間中に他の研究者により得られた．

群Ｇがコンパクト距離空間Ｍへの非初等的な収束群作用を持つとき，Ｇ不変かつ余有限であるＭ上の“円環系”を与えることによりＭの異なる３点の組たちの空間にＧ不変な双曲的擬距離が得られ，Ｇ同変な擬等長写像を通じてグロモフ双曲空間へのＧの作用が得られることが Bowditch により研究開始以前から指摘されていた．

研究開始以前は，このようにして得られるグロモフ双曲空間への作用が Bowditch による双曲群の位相的特徴づけや Yaman による相対的双曲群の位相的特徴づけなど，幾何学的有限な収束群作用を持つ群の研究に有用であることは知られていたが幾何学的無限である収束群作用への目立った応用は知られていなかった．

しかし、研究最終年度になって，上記の方法で得られるグロモフ双曲空間への作用を用いて幾何学的有限とは限らない収束群作用を持つ群が acylindrically hyperbolic であることが Sun によって明らかにされた．

上記の方法で得られるグロモフ双曲空間は“円環系”の選び方に依存していて，局所コンパクトとは限らず扱いが難しい場合がある．しかし，“円環系”の選び方によっては，上記の Sun の結果のように幾何学的有限とは限らない収束群作用を持つ群の研究にも有用であることが分かった．

そこで，上記の方法で得られるグロモフ双曲空間への作用の性質によって収束群作用たちを階層づけることが今後の方針として考えられる．

(2)群の不変生成

群Ｇが不変生成であるとは，群Ｇの部分群であってＧの任意の共役類との交わりが空でないようなものがＧのみであることをいう．

任意の有限群が不変生成であることは比較的容易に分かる．

しかし，無限群については未知の部分が多い．可換群，より一般に可解群が不変生成であることは比較的容易に分かる．一方，非初等的な収束群作用を持つ群は不変生成でないことが Gelander により示されている．この事実の証明には非可換自由部分群の存在が重要な役割を果たしている．

そこで，可解群ではないが非可換自由部分群を持たない群の代表例であるトンプソン群Ｆが不変生成であるかについて考察した．その結果，松元重則氏と共同で，トンプソン群Ｆを含む，直線の区分的線形同相写像のなすいくつかの群が不変生成であることを示し，第一稿をプレプリントサーバーarXiv にて公開した．

トンプソン群 Ｆ が不変生成であることは Gelander-Golan-Juschenko によっても独立に示されている．彼らはより強く有限不変生成であることを示しているが，その議論はトンプソン群Ｆ特有の性質にそれほど強く依存しておらず，直線の区分的線形同相写像のなすより多くの群に適用できることが期待される．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ等

無し

６．研究組織

(1)研究代表者

松田能文（MATSUDA YOSHIFUMI）
青山学院大学・理工学部・助教

研究者番号：６０５４９２９４

(2)研究分担者
無し

(3)連携研究者
無し

(4)研究協力者
無し