様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号： １３６０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５８０００３８

研究課題名（和文） 幾何学的・代数的トポロジーの手法による埋め込みの空間の研究

研究課題名（英文） Geometric and algebraic approach to the embedding spaces

研究代表者
境　圭一（SAKAI, Keiichi）

信州大学・学術研究院理学系・助教

研究者番号：２０４６６８２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：ある次元の球面の埋め込みを分類するHaefliger不変量を，グラフコサイクルに付随する配置空間上の積分で表示することで，Haefliger不変量が有限型不変量と同様の振る舞いをすることを確かめたほか，副産物として，球面のはめ込みである性質をみたすものに対する一般的正則ホモトピー不変量を得た．
また球面の埋め込みの空間が多重ループ空間であることに注目し，その"delooping"を位相的Stiefel多様体を用いて表すことにより，上記のHaefligerによる埋め込みの分類のホモトピー論的な解釈を得た．

研究成果の概要（英文）：The Haefliger invariant is known to classify the isotopy classes of embeddings of spheres in a dimension. I have described the Haefliger invariant using certain integrals over configuration spaces associated with graph cocycles, and I have shown that the Haefliger invariant behaves similarly to the finite type invariants. As a byproduct I have obtained a generic regular homotopy invariant of immersions with some conditions.
Based on the fact that the space of embeddings of spheres is a multi-fold loop space, I have given its "delooping" using the topological Stiefel manifolds, and I have obtained a homotopy-theoretic interpretation of the Haefliger's classification of the embeddings of spheres.

研究分野： トポロジー

キーワード： 埋め込みの空間　グラフ　配置空間　ループ空間　オペラッド

１．研究開始当初の背景

1 次元球面の 3 次元球面への埋め込みを扱う結び目理論は，現代のトポロジーにおける中心的な話題の一つである. 1 次元から 3 次元，という次元は実は埋め込みの中では難しいものである. 20 世紀中頃は一般次元の埋め込みが統一的に研究され，高次元では簡明な分類理論が得られるケースもあった．高次元との比較により，結び目理論を難しくしている障害がどこにあるかを理解することも可能と思われる．この意味でも，一般次元の埋め込みの分類は現在なお重要なものである.

結び目理論，または埋め込みの分類とは，連続変形（イソトピー）で移り合う埋め込みを同一視し，同値類のなす集合を決定することである．これとは異なる，しかし関係の深い立場として，埋め込み全体のなす集合に自然な位相を入れた空間（埋め込みの空間）を考える，という研究も早い段階から見られた．この立場からは，埋め込みの分類とは埋め込みの空間の 0 次ホモトピー群を求めることに他ならない．近年，1990 年代の V. Vassiliev の「有限型不変量」に関する研究や T. Goodwillie による関手の微積分の手法の発展を契機として，再び埋め込みの空間の研究が進み，結び目の分類理論の背景に埋め込みの空間の (0 次ホモトピー群にとどまらない) トポロジーが深く関わることがわかってきている.

研究代表者は，特に「有限型不変量」と呼ばれる結び目不変量の背後にある埋め込みの空間のトポロジーに注目して研究を進めている.

２．研究の目的

以下，考えている多様体を明示せず，埋め込みの空間を E で表す. 必要なときに多様体や次元をその都度明示する.

結び目に代表される埋め込みの分類は，「不変量」とよばれる，埋め込みの連続変形で値が変わらない「関数」を用いる方法によることが多い．特に結び目の場合には「有限型不変量」と呼ばれる不変量のクラスが重要で，その幾何学的意味については，多くの研究にも関わらず，未だに十分な理解が得られたとは言えない状況にあるように思える.
不変量は，E のトポロジーの観点からは，E の 0 次コホモロジー類とみなされる．いろいろな埋め込みや不変量の構成を真似すれば，E の（正の次数の）ホモロジー類，コホモロジー類を構成できると考えられる．さらに，E の幾何学的性質から導かれる（コ）ホモロジーのさまざまな代数構造を利用すれば，既知の（コ）ホモロジー類から新しいものを構成することもできる．研究代表者は，こうした構成が（有限型）不変量の幾何学的意味を E のトポロジーの言葉で説明するものであると考えた．このような観点で不変量と E のトポロジーの関連を調べることが一つめの目的であった.

多様体の埋め込みは微分トポロジー的な概念であるが，代数的トポロジーで古くから考察されてきた写像空間の研究手法が有効であることも知られていた．特に E が（以下で述べる”long embedding”の場合には）多重ループ空間のホモトピー型を持つことから，オペラッドを初めとするホモトピー論的な手法の応用も盛んになってきている．こうした微分トポロジーとは異なる手法により E の（有理）ホモトピー・ホモロジーを計算すること，また（有限型）不変量の幾何的解釈を模索することがもう一つの目的であった.

３．研究の方法

本研究では上記 2.のようなアイデアの元，j 次元ユークリッド空間から n 次元ユークリッド空間への埋め込みで，コンパクト集合の外では標準的な包含写像になっているもの (long embedding)のなす空間 E(n,j)について考察した.

R. Bott, C. Taubes, 河野俊丈らは，あるグラフ複体により統制される配置空間上の積分により，結び目の有限型不変量を記述した．この手法は A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni や C. Rossi, 渡邉忠之らにより高次元化された．研究代表者は過去に，この枠組みに適合したグラフ複体を記述したほか，E(6k,4k-1)の元をイソトピーで分類する Haefliger 不変量を配置空間積分の手法により記述した．本研究ではこのような背景のもと，Haefliger 不変量の「有限型不変量」としての性質について配置空間積分を用いて考察した.

E(n,j)（の変種）は(j+1)次元の小球のなすオペラッドの作用を許容し，従って(j+1)重多重ループ空間のホモトピー型を持つ．その”delooping”，つまり $E(n,j)=\Omega^{j+1}X(n,j)$となる空間 X(n,j)については様々な研究があるが，研究代表者は過去に X(n,j)を「位相的 Stiefel 多様体」と呼ばれる空間を用いて記述した．本研究ではこの事実に基づき，Haefliger による高次元埋め込みの分類理論と位相的 Stiefel 多様体の関連について考察した.

４．研究成果

(1) <u>Haefliger 不変量の有限性について</u>
配置空間積分による Haefliger 不変量の表示

が可能であったことにより，Haefliger 不変量が「有限型不変量」と呼べることが示唆される．本研究ではこのことを実際に確認した．具体的には，Haefliger 不変量の積分表示が次数 2 の有限型不変量（Casson 不変量）のそれに似ていることに注目し，Casson 不変量に対する M. Polyak, O. Viro の組み合わせ的な公式，その一般化である X.-S. Lin, Z. Wang の公式の高次元版といえる公式を導くことができた．詳細な内容は次の通りである．まず，結び目理論における「結び目図式の交点」ならびに「交叉交換」の概念を素朴に高次元化した．その上で，交叉交換の下での Haefliger 不変量の変化を，「交点」として得られる j 次元球面内の部分多様体の絡み数で記述した．その証明には先述の配置空間積分による Haefliger 不変量の表示を活用した．
応用として，小笠英志の高次元はめ込みの自己交叉に関する結果を援用すると，村井美里と大場清による E(6,3)の元の結び目解消数に関する結果(2004)の別証明を与えることができた．

Lin-Wang は，彼らの公式を得る過程で，結び目を平面に射影した一般的な平面曲線の不変量を得た．彼らの不変量は「Arnold 不変量」とよばれる有限型不変量の一次結合で与えられ，その次数は 1 である．この結果の高次元化として，(j-1)次元球面の(n-1)次元球面への一般的なはめ込みの不変量を Haefliger 不変量を用いて構成することができた．この次元の場合, Arnold 不変量に対応するものとして, T. Ekholm の不変量が知られているが，結び目理論の場合とは異なり，研究代表者が得たはめ込み不変量は Ekholm 不変量の 1 次結合では表せず，従って次数 1 でないことがわかった．結び目理論を手本とした構成であったが，はめ込みまで見ると高次元に独自の現象がみられたことになる．はめ込み不変量に関するこれら一連の結果は，当初は全く想定していないものであった．このはめ込み不変量と既存の不変量との関係は今なお明らかでなく，今後のさらなる研究が待たれる．

これらの結果は，2014 年 8 月に Dalian Nationalities University で行われた研究集会 ”ICM2014 Satellite Conference on Algebraic Topology” などで発表したほか，既に専門誌に論文が掲載済みである（下記 5.(1)）．

(2) <u>long embedding の空間の delooping</u>
Haefliger は E(6k,4k-1)のみならず，より一般の次元の long embedding のイソトピーによる分類，つまり π_0(E(n,j))の計算を，ある相対ホモトピー群の計算に帰着した．π_0 のみならず, Haefliger の構成で E(n,j)のホモトピー群がどこまでわかるか，というのは自然な問いであろう．研究代表者は過去に E(n,j)の delooping を（n－j>2, n≠5 のときに）位相的 Stiefel 多様体 V を用いて記述したが, V のホモトピー群についての結果を援用することにより，Haefliger の構成は E(n,j)の(2n-2j-5)次のホモトピー群までを計算していることを確かめることができた．B. Munson (2005)は”Goodwillie calculus”という方法により Haefliger 不変量が”Goodwillie tower”の 2 次の項から得られることを示しているが, 本研究はそれが可能であった理由を説明するものとも言える．Haefliger の構成は球面の自己ホモトピー同値のなす位相モノイドを使っており，球面の（安定）ホモトピー群と関連が深い．今回の考察から，ある次元までは球面の（安定）ホモトピー群と E(n,j)のホモトピー群が密接に関連することが確かめられた．

さらに, V と球面の同相のなす群 H が関連することから，E(n,j)と H が関連することも確かめられた．このことは E(n,j)のホモトピー群の理解に向けた新たな視点を提供すると考えられる．

これらの結果は下記 5. (2), (3)の論文にまとめて公表し，また国内の研究集会やセミナーなどで発表した. (3)については既に専門誌に掲載済みである. (2)についても既に専門誌に受理され，電子版が公開されている．

(3) <u>long knot の分類空間</u>
(2)で述べた delooping は n－j>2 のときに得られたもので，最も興味ある次元の一つである E(3,1)には適用されない．この場合は連結和による位相モノイド構造に注目し，「群完備化」ΩBE(3,1)を考えると，群完備化の 2 重 delooping などを論じることができる．そのために「分類空間」BE(3,1)が何であるかを知ることが重要である. π_0のレベルでは, J. Mostovoy による”short rope”を用いた群完備化の記述があるが，これを空間レベルへ拡張することについて，大阪府立大の森谷駿二氏と島根大の渡邉忠之氏と共に検討した．その結果，S. Galatius, O. Randal-Williams らによる同境圏の研究手法を応用するのが適当であろうという方向性が見えた．分類空間と部分多様体の同境のなす空間，short rope の空間の関連について研究を継続している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

(1) <u>Keiichi Sakai</u>, Lin-Wang type formula for the Haefliger invariant, Homology,

Homotopy and Applications, Volume 17, Number 2 (2015), pages 317-341, 査読有

(2) Keiichi Sakai, BV-structures on the homology of the framed long knot space, to appear in Journal of Homotopy and Related Structures (2016)(電子版で掲載済み：2015年5月), 17 pages, 査読有

(3) Keiichi Sakai, Delooping of the spaces of long embeddings, Fundamenta Mathematicae, Volume 227, Number 1 (2014), pages 27-34, 査読有

〔学会発表〕(計 4 件)

(1) Keiichi Sakai, Delooping of the space of long embeddings, 九州大学, 2015年11月6日

(2) Keiichi Sakai, Lin-Wang type formula for Haefliger's invariant, 京都大学, 2014年12月3日

(3) Keiichi Sakai, Haefliger不変量に対するLin-Wang型公式, 日本数学会2014年度秋季総合分科会, 広島大学, 2014年9月27日

(4) Keiichi Sakai, Haefliger不変量に対するLin-Wang型公式, 信州大学, 2014年4月17日

〔その他〕

ホームページ等

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者

境 圭一 (SAKAI, Keiichi)

信州大学・学術研究院理学系・助教

研究者番号：20466824

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし