

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800039

研究課題名(和文)非正曲率空間とその等長変換群およびコクセター群の研究

研究課題名(英文) Research on spaces of non-positive curvature, their isometry groups and Coxeter groups

研究代表者

保坂 哲也 (Hosaka, Tetsuya)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50344908

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：CAT(0)群とCAT(0)空間、その境界、およびCoxeter群とグラフ理論の研究を行い、いくつかの研究成果を得た。まず、群が2つのproperなCAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、この2つの空間の理想境界の間に不変同相写像が存在するための十分条件および必要十分条件に関する研究を進展させ、特にCoxeter群が作用する場合についての結果および応用例を得た。また応用例等を考察することにより、ある単純な形のCAT(0)群が境界の位相を決定しない例となるのではないかと、という予想を得た。また、Coxeter群を用いたグラフ理論への応用を進展させ、再構成可能グラフについても成果を得ている。

研究成果の概要(英文)：I obtained some results on CAT(0) groups, CAT(0) spaces, their boundaries, Coxeter groups and graph theory. First, in the case that a group acts geometrically (i.e. cocompactly, properly discontinuously and by isometries) on two proper CAT(0) spaces, I gave a sufficient condition and an equivalent condition of the group actions as there exists an equivariant homeomorphism between the ideal boundaries of the two CAT(0) spaces. In particular, I obtained some results in the case that the CAT(0) group is a Coxeter group. By observing some applications and examples, I obtained a conjecture that some CAT(0) groups with some simple forms will be non-boundary-rigid CAT(0) groups with uncountable many boundaries. Also I obtained some results on reconstructible graphs from investigating corresponding Coxeter groups.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学的群論 位相幾何学 グラフ理論

1. 研究開始当初の背景

測地線空間上の三角形をユークリッド平面(曲率0の平坦な空間)の三角形と比較して、より内側に曲がっていることをみることにより、非正の曲率をもつ空間の定式化を行うことができる。このような空間を CAT(0)空間とよぶ。例えば、ユークリッド空間や、双曲空間、また、非正の断面曲率をもつ基本群の消えているリーマン多様体などは、その例であるが、CAT(0)空間は、測地線の三角形の比較のみで定義されているため、そのクラスは幅広く豊かで、非常に複雑なワイルドな空間も含む。有界な閉集合がコンパクトとなる空間を proper とよぶが、非有界な proper CAT(0)空間は、「境界」とよばれるコンパクト距離空間を付け加えることによりコンパクト化される。CAT(0)空間およびその境界は、非常に興味深い研究対象であり、本研究の主な対象である。負曲率の定式化としては、Gromov hyperbolic 空間が有名であり、その場合も「境界」が定義されるが、Gromov hyperbolic でありかつ CAT(0)である空間のそれぞれから定義される境界は、一致する。CAT(0)空間の境界としては、任意のコンパクト距離空間が CAT(0)空間の境界として実現できることが知られており、その意味でも非常に豊かであり、また、一般に非常に複雑である。本研究では、特に、等長的で離散な群作用のある CAT(0)空間とその境界を主な研究対象としている。

Proper な CAT(0)空間に幾何学的に(等長的、コンパクト、真性不連続に)作用する群を CAT(0)群とよぶ。例えば、非正曲率を持つコンパクトなリーマン多様体の基本群は、CAT(0)群の例である(その universal covering が CAT(0)空間となり、基本群は幾何学的にこの CAT(0)空間に作用するため)。本研究では、CAT(0)空間とその境界の研究を通して、この CAT(0)群の研究を行っている。

与えられた CAT(0)群が2つの CAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、「この2つの CAT(0)空間の境界の間にどのような関係があるのか」、特に、「与えられた CAT(0)群によって境界の位相は決定されるのか」が、境界の rigidity の問題として有名である。これは、Gromov-hyperbolic の場合(negative curvature の場合)には、成立することがよく知られている。また、M. Bestvina の考察および G. Ontaneda の証明によって、与えられた CAT(0)群によりその境界は shape 同値の意味では決定されることが示されており、また、cell-like 同値の意味で決定されるかは M. Bestvina によって提唱されている未解決問題である。近年、C. Guillbault や C. Mooney などにより、特定の CAT(0)群の境界の cell-like 同値性についての研究論文がある。C. Mooney による論文の証明の中では、以前の本研究成果の Splitting Theorem が用いられている。一方で、C. Croke-B. Kleiner によって、CAT(0)群でその境界が位相的に決定され

ない例が構成されている。更に、その境界の位相は非可算無限のバリエーションがあることが J. Wilson によって示されている。Gromov-hyperbolic group の場合においては、その境界は、quasi-isometry が自然に境界上の不変同相写像を導く。これと同様のことが CAT(0)の場合にいつできるか、という Gromov の問いかけがあるが、P. Bowers-K. Ruane によって、ごく簡単な「作用のずれ」によって quasi-isometry が境界上の不変同相写像に拡張できない例が構成されている。本研究では、P. Bowers-K. Ruane の例の構成に用いられた「作用のずれ」に着目し、この「作用のずれ」が定数で抑えられる場合には、quasi-isometry が境界上の不変同相写像に自然に拡張できることを示している。

Coxeter 群は Davis 複体とよばれる CAT(0)空間に幾何学的に作用するため、Coxeter 群は CAT(0)群である。幾何学的には、有限 Coxeter 群がある一つの結晶を表現していると考えられるのに対して、無限 Coxeter 群から定義される Davis 複体(CAT(0)空間)は、無限個の結晶をある規則により結合させたものを表現していると捕らえることができる。Coxeter 群は代数的に非常に道具が豊かな群であり、CAT(0)群の重要な例としても、Coxeter 群の研究は重要である。近年、W. Ballmann-M. Brin による rank-one isometry と CAT(0)群の境界に関する結果、および、P. Caprace-K. Fujiwara による Coxeter 群の rank-one isometry に関する結果を利用するアプローチにより、既約な non-affine Coxeter 群の境界は、フラクタルのような入れ子状の構造を持ち、更に、極限点の集合が境界上で稠密になることがわかる。この結果の進展および、他の Coxeter 群ではない CAT(0)群でも常に同様のことが成立するかは重要な問題と考えている。

また、特定の群に対して、幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界としてどのような空間が実現され得るのか、は大変興味深い問題であり、この問題に防衛大の知念直紹先生と共同研究で取り組んでいる。CAT(0)空間および CAT(0)群の asymptotic 次元、Higson corona の次元、および、境界の次元の間の関係についても共同研究で研究成果を得ている。特に、Bestvina-Mess の定理のような asymptotic 次元と境界の被覆次元との関係性の片方の不等号を示すことができた。

グラフ理論において再構成可能グラフの研究は重要であり、また、未解決な部分の多い問題である。Coxeter 群と有限単純グラフは対応することが知られている。Coxeter 群の群環係数のコホモロジーの結果に着目して、再構成可能なグラフの新しいクラスが得られ始めている。

2. 研究の目的

(1) 群が2つの proper な CAT(0)空間に幾何学的に作用するとき、この2つの CAT(0)空間

の理想境界の間に不変同相写像が存在するための十分条件および必要十分条件に関する研究を進展させる。特に、Coxeter 群が離散鏡映群として CAT(0)空間に作用する場合には、より精密な情報が得られるため、一般の CAT(0)群で成立する以上の性質を探る。また、既に得られている不変同相写像が存在するための十分条件および必要十分条件が応用できる例などについて研究を進める。

(2) これまでの CAT(0)空間の asymptotic 次元と理想境界の被覆次元に関する研究の発展や応用の研究、および、半直積で表せる CAT(0)群とその境界に関する研究の推進。

(3) Coxeter 群を用いたグラフ理論への応用を進展させ、再構成可能なグラフの新しいクラスを見つける。

(4) CAT(0)群の構造の研究を進める。

(5) Coxeter 群の代数的な rigidity および分類問題の研究。

3. 研究の方法

防衛大の知念直紹先生と共同研究を行い、CAT(0)空間の asymptotic 次元と理想境界の被覆次元に関する研究、および、半直積で表せる CAT(0)群とその境界に関する研究等を推進した。

またその他にも、研究集会で成果発表を行い、近い分野の研究者と情報交換や議論を行い、研究を推進した。

また、平成 25 年度は、静岡大学大学院博士課程の肖永火氏のセミナーで、グラフと対応する flag 複体を調べる手法により、再構成可能なグラフの新しいクラスに関する研究を共同で行い研究成果を得ている。

4. 研究成果

(1) CAT(0)群が幾何学的に作用する CAT(0)空間の境界の間の不変同相に関する研究が進展した。特に、Coxeter 群がコンパクト離散鏡映群として CAT(0)空間に作用する場合にはその境界が不変同相によって決まる十分条件および応用例を得た。また、これまでの研究内容および応用例を考察することにより、ある単純な形の群が境界の位相を決定しない(non-boundary-rigid な)、しかも境界として非可算無限の位相を持つ CAT(0)群ではないか、という予想を得た。

(2) グラフ理論における有名な問題「再構成可能問題」に取り組み、一部研究成果を得た。特に、グラフを flag 複体と対応させ、「(ホモロジー)多様体を三角形分割した flag 複体の 1-skeleton が再構成可能なグラフである」ことの検証および証明の修正を行った。また、この定理の部分的な拡張を Y.Xiao 氏と共同で行い研究成果を得ている。

(3) CAT(0)群の構造に関する研究が進展した。CAT(0)群は必ず半直積の構造を持つ。この構造と CAT(0)群の rank-one 性、および Flat Torus Theorem の逆は一般に成立するののかという問題に対して、単独での研究と知念直紹

先生との共同研究それぞれで進展が見られた。

(4) 知念直紹先生との共同研究で、CAT(0)空間の asymptotic 次元と境界の次元に関する以前の研究成果について、外部から証明の不備の指摘を受けて、証明の修正を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Tetsuya Hosaka, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups and Coxeter groups, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 43, 2015, 68-94, doi: 10.1016/j.difgeo.2015.09.004 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0926224515001072>

Tetsuya Hosaka and Yonghuo Xiao, A new class of reconstructible graphs from some neighbourhood conditions, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, 44, 2015, 327-340 <https://projecteuclid.org/euclid.hokmj/1470053367>

Naotsugu Chinen and Tetsuya Hosaka, Erratum to "Asymptotic dimension and boundary dimension of proper CAT(0) spaces", Tsukuba Journal of Mathematics, 査読有, 39, 2015, 165-166 <https://projecteuclid.org/euclid.tkbjm/1438951821>

Tetsuya Hosaka, Reconstructible graphs, simplicial flag complexes of homology manifolds and associated right-angled Coxeter groups, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, 52, 2015, 1173-1181 <https://projecteuclid.org/euclid.ojm/147856039>

[学会発表](計 3 件)

Tetsuya Hosaka, Reconstructible graphs, simplicial flag complexes of homology manifolds and associated right-angled Coxeter groups, 第 49 回位相空間論シンポジウム, 2014 年 6 月 5 日, 京都工芸繊維大学, 京都府京都市

保坂 哲也, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups and Coxeter groups, 京都大学数理解析研究所研究集会「集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望」, 2013 年 10 月 17 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市

Tetsuya Hosaka, On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups and Coxeter groups, International Conference on Topology and Geometry 2013 in Matsue, 2013年9月5日, 島根大学, 島根県松江市

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.sci.shizuoka.ac.jp/~math/staffs/hosaka.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

保坂 哲也 (HOSAKA, TETSUYA)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50344908

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし