様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８０００４０

研究課題名（和文）精密化されたゲージ理論的不変量の研究

研究課題名（英文）Study of refined gauge theoretic invariants

研究代表者
笹平　裕史（Sasahira, Hirofumi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：３０４６６８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：第一Betti数が正の３次元多様体のSeiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型を研究した．Seiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型は，もともと有理ホモロジー３球面に定義されたが，第一Betti数が正の場合へ拡張するとき，新たな困難が現れる．私はT. Khandhawit氏（IPMU），J. Lin氏(UCLA)との共同研究を行い，不変量の拡張に成功し，幾つかのトポロジーへの応用を得ることができた．

研究成果の概要（英文）：I studied the Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type for 3-manifolds with positive first Betti number. The Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type was originally defined for rational homology 3-spheres. When the construction is extended to more general 3-manifolds, some difficulties appear. I studied about the difficulties with T. Khandhawit (IPMU) and J. Lin (UCLA) and we succeeded in extending the construction of the Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type to general 3-manifolds.

研究分野：トポロジー

キーワード：ゲージ理論　Floer理論

1．研究開始当初の背景

Floer ホモロジーとは，多様体上の幾何学的構造から定義される無限次元多様体上の汎関数の Morse ホモロジーである．つまり，汎関数の臨界点を生成元とする加群に，汎関数の勾配曲線の数を数えることによって定義される境界作用素が定義され，その複体のホモロジーとして，Floer ホモロジーが定義される．

Floer ホモロジーにはこれまで色々な種類のものが定義され，トポロジーやシンプレクティック幾何学において大変強力な不変量となっている．

一方，Cohen-Jones-Segal は Floer ホモロジーを精密化する不変量である Floer 安定ホモトピー型を提唱した．Floer ホモトピー型とは，汎関数を用いて定義される位相空間の安定ホモトピー型で，そのホモロジーをとると Floer ホモロジーと同型になるものである．Cohen-Jones-Segal はシンプレクティック Floer 理論において，Floer 安定ホモトピーの構成について議論したが，厳密に Floer ホモトピー型を構成するには様々な困難がある．

３次元多様体には Seiberg-Witten-Floer ホモロジーが Kronheimer-Mrowka によって構成されていた．対応する Floer ホモトピーの構成は，Manolescu によって与えられたが，その構成は有理ホモロジー３球面に限られていた．より一般の３次元多様体に対する Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成を行うには，困難が残ったままだった．より一般の３次元多様体に対する Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成は，基本的な問題として，この分野で残されていた．

２．研究の目的

研究の目的は，有理ホモロジー３球面以外の３次元多様体に Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を定義し，トポロジーへ応用することである．

Seiberg-Witten-Floer ホモロジーの重要な役割は，４次元多様体の Seiberg-Witten 不変量を境界付き４次元多様体へ拡張し，貼り合わせ公式を構成することである．つまり，４次元多様体がある３次元多様体に沿って，二つの境界付き４次元多様体に分割できたとする．このとき，それぞれの境界付き４次元多様体に Seiberg-Witten 不変量を定義する．その境界付き４次元多様体の Seiberg-Witten 不変量は，Seiberg-Witten-Floer ホモロジーに値をもつ不変量である．Seiberg-Witten-Floer ホモロジー上にはあるペアリングが定義でき，２つの境界付き４次元多様体の Seiberg-Witten 不変量とペアリングを用いて，もとの閉４次元多様体の Seiberg-Witten 不変量が計算できるというのが，貼り合わせ公式である.この貼り合わせ古式は，Seiberg-Witten 不変量を計算するための重要な公式である．Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型が定義できれば，Seiberg-Witten 不変量の精密化である Bauer-Furuta 不変量を境界付き４次元多様体に対して，拡張し，貼り合わせ公式が構成できる可能性がある．実際，Manolescu は境界の第一 Betti 数が 0 である場合は，それを実行した．この研究の目的は，その構成を第一 Betti 数が正の場合にまで拡張することである．さらに，貼り合わせ公式を用いて，実際に Bauer-Furuta 不変量を計算することも試みる．

Seiberg-Witten-Floer ホモロジーのトポロジーへの応用では，３次元多様体の手術に関する振る舞いを研究することが重要であった．その研究を Floer 安定ホモトピー型まで拡張することにより，トポロジーへの応用を行うことも研究の目的である．

３．研究の方法

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の Manolescu による構成は，Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似と Conley の理論の組み合わせによるものだった．本研究でもこの方法を踏襲した．

有向閉３次元多様体とその上の Riemann 計量，spin-c 構造を選ぶと無限次元多様体上の Chern-Simons-Dirac 汎関数を得る．その臨界点は Y 上の Seiberg-Witten 方程式の解であり，勾配曲線は３次元多様体と直線の直積上の Seiberg-Witten 方程式の解になっている．

３次元多様体の第一 Betti 数が０のとき，Chern-Simons-Dirac 汎関数はよい有限次元近似を持ち，その有限次元近似して得られる関数の勾配流により，有限次元多様体上の flow が得られる．一方，有限次元多様体上の（または局所コンパクトな距離空間上の）flow が与えられたとき，その``孤立不変集合”というものに対して，位相空間のホモトピー型を対応させる Conley の理論がある．Siberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間は強いコンパクト性を持ち，それはモジュライ空間が Chenrn-Simons-Dirac 汎関数の勾配流の孤立不変集合になっていることを意味する．このことから，Chern-Simon-Dirac 汎関数の有限次元近似により得られる有限次元多様体上の flow に Conley の理論を適用することができ，ある位相空間のホモトピー型を得る．有限次元の度合いを大きくすると，そのホモトピー型は，（適当な意味で）安定し，その安定ホモトピー型が Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型である．

３次元多様体の第一 Betti 数が正の場合は，Chern-Simons-Dirac 汎関数が定義されている空間に，３次元多様体の整数係数の１次元コホモロジー群が作用している．問題は，この作用がChenrn-Simons-Dirac汎関数の有限次元近似との相性が悪いということである．私は，３次元多様体上のあるDirac作用素の族の spectral section というものが有効であることを見出し，それを用いて，Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成を行った.ただし，spectral section はいつも存在するわけでなく，３次元多様体がある位相的な条件を満たす時に，存在する．また，T. Khandhawit 氏(IPMU)と J. Lin 氏(UCLA) との共同研究により，３次元多様体の１次元コホモロジー群の作用で割らずにSeiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成を行うことを研究した．考えているモジュライ空間は１次元コホモロジーの作用で割れば，よいコンパクト性を持つが，作用で割らずに考えるとそのコンパクト性が弱くなる．その問題点を共同研究者とどのように解決するかを研究した.

４．研究成果

３次元多様体がある位相的な条件を満たすう場合，その３次元多様体上のあるDirac作用その族が spectral section というものを持つことがわかる．私は，その spectal sectionを用いて，Seiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型を定義した．さらに，そのSeiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を用いて，４次元多様体の Bauer-Furuta 不変量を境界付き４次元多様体へ拡張し，Bauer-Furuta 不変量の貼り合わせ公式を構成することができた.

Khandhawit 氏と Lin 氏との共同研究により，一般の３次元多様体に対して，Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型のもう一つのヴァージョンを構成することができた．さらに,スピン構造に由来するスピン C 構造を用いると， Pin(2)同変なSeiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を定義できることが示せた．Froyshovの３次元多様体の不変量の構成の考えを，我々のPin(2)同変 Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型に適用すると，有理数に値をもつ３次元多様体のホモロジー同境不変量を定義することができる．(第一 Betti 数が０の場合は,Manolescuが行っていた.）特に，そのK理論版を用いて，境界付きスピン４次元多様体の交差形式への応用を行った．この交差形式への応用は，もともとは古田幹雄氏が閉４次元多様体の場合に行い，Manolescu，T.J. Li-Furuta が境界がホモロジー球面の場合に行っていた．我々は境界を一般の３次元多様体へ拡張した．この一つの系として，スピンでない４次元多様体の交差形式への応用ができる．スピンでない４次元多様体があった時に，その第２Stiefel-Whiteny類のPoincare双対を代表する曲面の近傍を４次元多様体から取り除く．すると，曲面上の U(1)束を境界とするスピン４次元多様体を得る．この境界付き４次元多様体に我々の結果を適用することにより，もとのスピンでない４次元多様体の交差形式に関する結果を得ることができる.

また，この Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を用いて，（ある技術的な仮定のもと）Bauer-Furuta不変量の貼り合わせ公式を証明した．貼り合わせ公式の応用として次を示した.

(1) Seiberg-Witten-Floer安定ホモトピー型の連結和公式

２つの有理３球面の連結和のSeiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型はそれぞれの Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型のスマッシュ積に同型である．この主張は第一Betti数が０の場合に示されているが，証明の途中で第一Betti数が正の３次元多様体に沿った貼り合わせ公式を用いるため，我々の貼り合わせ公式が必要なる．２つの有理３球面の直和と連結和の間には，自然な同境が存在する．その同境のBauer-Furuta 不変量が，Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の同型を誘導することを示すのが証明である．その中で,Bauer-Furuta不変量の貼り合わせ公式を利用する.

(2) 自明な法束をもつ本質的球面の非存在

貼り合わせ公式の応用のもう一つの応用として，次を示した.Bauer-Furuta不変量が非自明な４次元多様体には自明な法束を持つ，本質的２次元球面は存在しない．もし，そのような球面が存在したとすると，４次元多様体が球面上の自明な U(1)束に沿った分解をもつ．我々の貼り合わせ公式と，モジュライ空間に関するある考察を組み合わせると Bauer-Furuta 不変量は自明にならなければならない．このとこから，主張を得る.

ここまでで説明した研究結果は，一部はすでに論文に書き雑誌に投稿中であり，残りの部分は現在執筆中である.

一方，研究の目的の一つだったSeiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の３次元多様体の手術に関する振る舞いは，これまでの研究では，論文にするほどの結果をまだ得ていない．手術に関する振る舞いの研究では,Khandhawit氏とLin氏との共

同研究で得た，Bauer-Furuta 不変量の貼り合わせ公式が重要な役割を果たすと私は考えている．Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の手術に関する振る舞いは今後の研究課題とし，この研究で得た結果をさらに発展させていきたいと考えている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① Masashi Ishida, Hirofumi Sasahira, Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number, I: non-vanishing theorem. *Internat. J. Math.* 26 (2015)　（査読有り）

② Hirofumi Sasahira, Floer homology for 2-torsion instanton invariants. *Asian J. Math.* 17 (2013), no. 3, 471–523.　（査読有り）

③ Hirofumi Sasahira, Instanton Floer homology for lens spaces. *Math. Z.* 273 (2013), no. 1-2, 237–281.　（査読有り）

〔学会発表〕（計　４　件）
① 笹平　裕史，Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型，関西ゲージ理論セミナー，京都大学，２０１６年３月

② Hirofumi Sasahira,　Spin structures on Seiberg-Witten moduli spaces, The joint Los Angeles topology seminar, UCLA,　２０１５年４月

③ 笹平　裕史，第一 Betti 数が１の３次元多様体に沿った Bauer-Furuta 不変量の貼り合わせ，幾何学セミナー，明治大学、２０１３年６月

④ 笹平　裕史，第一 Betti 数が①の③次元多様体に沿った Bauer-Furuta 不変量の貼り合わせ，幾何学セミナー，名古屋大学，２０１４年４月

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
笹平　裕史　(SASAHIRA, Hirofumi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教
研究者番号：30466825

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：