

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800045

研究課題名(和文)インスタントンのモジュライの計量幾何の観点からの研究

研究課題名(英文)Moduli spaces of instantons from a metric point of view

研究代表者

松尾 信一郎(Matsuo, Shinichiroh)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40599487

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：報告者は四次元多様体論におけるゲージ理論のドナルドソン理論とザイバーグ=ウィッテン理論を超越的手法により研究している。特に、インスタントンやモノポールのモジュライ空間のコンパクト性の機構の背後に興味がある。本課題の研究成果としては、次が得られた。インスタントンのモジュライ空間が非コンパクトであるときのその非コンパクト性の度合いを定量化するため、 L^2 計量を導入し、その直径のインスタントン数が大きくなる極限での増大度を調べた。その結果として、標準球面のときのモジュライ空間の直径の最適な評価が得られた。

研究成果の概要(英文)：My mathematical interests include Donaldson theory and Seiberg-Witten theory in four-manifold topology. Especially, I am interested in non-compactness phenomena of the moduli spaces of instantons.

I proved an optimal asymptotic growth of the diameters of the moduli spaces of instantons with respect to the instanton number for the standard 4-sphere.

研究分野：微分幾何

キーワード：Donaldson理論 四次元多様体 幾何解析

1 研究開始当初の背景

報告者はそれまで主に四次元多様体の Donaldson 理論を解析的手法により研究していた。Donaldson 理論では四次元多様体とその上のインスタントンのモジュライを研究する。報告者のそれまでの研究で重要だったことは、「非コンパクト」四次元多様体上でのインスタントンの「無限次元」モジュライを、「コンパクト」四次元多様体上でのインスタントンの「有限次元」モジュライで近似することである。その過程で、これまでの研究を深めるためにも、それ自体の興味としても、コンパクト四次元多様体上でのインスタントンのモジュライの L^2 計量における直径や体積を研究することが重要と洞察された。これまで Donaldson 理論ではインスタントンのモジュライの位相幾何学的側面は詳しく研究されてきた。例えば Donaldson 不変量とは本質的にはインスタントンのモジュライの Euler 類のことである。しかし、モジュライの計量幾何 (metric geometry) 的側面についてはほとんど研究されていない。

2 研究の目的

本研究の思弁的な目的は次である。一つの四次元多様体 X からは、無限個のインスタントンのモジュライ M_1, M_2, M_3, \dots が定義される。 M_k とその上の L^2 計量は次元の増大する Riemann 多様体の列である。これら無限個のモジュライ $\{M_k\}$ の全体を一つの空間と捉え、「漸近的無限次元距離空間」として研究する。

本研究の実践的な目的は次である。四次元多様体の Donaldson 理論におけるインスタントンのモジュライには自然な L^2 計量が入る。これは Riemann 面のモジュライにおける Weil-Peterson 計量のインスタントン版である。本研究ではインスタントンのモジュライの L^2 計量の幾何を解明する。

1. インスタントンのモジュライの直径が有限であることを示す。
2. 直径のインスタントン数の増大に対する漸近挙

動についての予想 $\text{diam } M_k = O(\sqrt{k})$ を示す。

3 研究の方法

インスタントンのモジュライの直径と体積が有限であることを示すための基本方針は、モジュライの L^2 計量による完備化と Uhlenbeck コンパクト化の一致を示すことである。一般に、インスタントンのモジュライはコンパクトではないが、その非コンパクト性の要因は Uhlenbeck により解析されている (バブル解析)。そして、モジュライを稠密に含むコンパクト集合として Uhlenbeck コンパクト化が定義されている。また、一般に、インスタントンのモジュライの L^2 計量は完備計量ではない。従って、モジュライの L^2 計量による完備化が定義できる。これらの一致を示すことで、直径と体積が有限であることが従う。

インスタントンのモジュライの直径の漸近挙動についての予想 $\text{diam } M_k = O(\sqrt{k})$ を示すための基本方針は、モジュライの任意の点からモジュライの Uhlenbeck コンパクト化の特定の一点 (最大バブル点) までの道を構成しその長さを評価することである。四次元球面 S^4 上の $k = 1$ のモジュライ $M_1(S^4)$ に対しては、共形変換群の作用により、具体的に道が構成できる。一般の四次元閉多様体に対しては、 $M_1(S^4)$ のときに構成された道を利用して、Taubes の貼り合わせの議論を応用することで構成する。その長さの評価のためには Uhlenbeck のア priori 評価をバブルする極限での定量的評価に改善する必要がある。

4 研究成果

標準的の四次元球面のとき、最適な漸近評価 $\text{diam } M_k = O(\sqrt{k})$ を示すことができたと思われる。その証明は基本的に上述の方法に従う。現在論文執筆中である。

一般の四次元多様体のときは残念ながらまだ解決には至っていない。しかし、副産物として、Weitzenböck 公式の考察を経て、Seiberg-Witten 不変量についての結果が出た。その結果についても

説明する。さて、Seiberg-Witten 不変量とは四次元有向閉多様体 X の微分同相不変量であって、 X 上の Spin^c 構造の全体から整数への写像

$$\text{SW}_X: \text{Spin}^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

である。この不変量は SW 方程式の解のモジュライ空間の上の交叉理論により定義される。SW 方程式

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ iF_A^+ = -\sigma(\Phi) \end{cases}$$

とは Dirac 方程式と曲率に関する偏微分方程式の連立方程式であって、その解のモジュライ空間のコンパクト性を著しい特徴とし、Weitzenböck 公式を介して微分幾何への応用がある。例えば、SW 不変量が非自明な四次元閉多様体は正スカラー曲率計量を持たない。すなわち、SW 不変量が非自明な四次元閉多様体の山辺不変量は非正である。その証明は Dirac 作用素の Weitzenböck 公式を経由し最大値原理により示される。スピンド様体に対する Lichnerowicz の定理の証明の非線形化である。この方向での現在最良の結果の一つとして、LeBrun の曲率不等式がある。

共著論文 [1] では、Dirac 作用素と自己双対二次形式の Weitzenböck 公式を出発点として SW 方程式の新しい摂動

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ iF_A^+ = -\frac{1}{\sqrt{8}}\beta(|\sigma(\Phi)|) \left[\left(\frac{2}{3}R_g + 2w_g \right)_- + \epsilon \right] \sigma(\Phi) \end{cases}$$

を導入し、SW 方程式の解のモジュライ空間のコンパクト性と LeBrun の曲率不等式に新しい観点からの証明を与えた [1, Theorem 4 and 8].

共著論文 [2] では、SW 不変量の変種である $\text{Pin}^-(2)$ -モノポール不変量に対する貼り合わせ構成を精密にすることにより、新しい非消滅定理を示した [2, Proposition 6 and 7]. その応用として、通常の SW 不変量も Bauer-Furuta 不変量も消えているが $\text{Pin}^-(2)$ -モノポール不変量は消えていないような四次元閉多様体の例を無限に構成した。このような四次元多様体の族に対して LeBrun の曲率不等式を適用することで、山辺不変量の新たな計

算例が得られる。例えば、Enriques 曲面の任意有限個の連結和の山辺不変量が零であることを示した [2, Theorem 1, 2, and 3].

5 主な発表論文等

[雑誌論文：査読あり] (計 5 件)

- [1] Mikio Furuta and Shinichiroh Matsuo, *The perturbation of the Seiberg-Witten equations revisited*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 4, 1655–1668, DOI 10.2969/jmsj/06841655. MR3564446
- [2] Masashi Ishida, Shinichiroh Matsuo, and Nobuhiro Nakamura, *Yamabe invariants and the $\text{Pin}^-(2)$ -monopole equations*, Math. Res. Lett. **23** (2016), no. 4, 1049–1069, DOI 10.4310/MRL.2016.v23.n4.a4. MR3554500
- [3] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto, *Local mean dimension of ASD moduli spaces over the cylinder*, Israel J. Math. **207** (2015), no. 2, 793–834, DOI 10.1007/s11856-015-1162-z. MR3359719
- [4] ———, *Brody curves and mean dimension*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 159–182, DOI 10.1090/S0894-0347-2014-00798-0. MR3264765
- [5] Shinichiroh Matsuo, *The prescribed scalar curvature problem for metrics with unit total volume*, Math. Ann. **360** (2014), no. 3-4, 675–680, DOI 10.1007/s00208-014-1052-4. MR3273641

[学会発表：招待講演] (計 24 件)

- [1] Shinichiroh Matsuo, *Yamabe invariants and the twisted Seiberg-Witten equations*, 早稲田大学, 2016/12/17.
- [2] ———, *ASD connections and mean dimension*, The Simons Center for Geometry and Physics, 2016/10/17.
- [3] ———, *The perturbed Seiberg-Witten equations and scalar curvature estimates*, Fujian Normal University, 2016/9/11.
- [4] ———, *Brody curves and mean dimension*, Tohoku Forum for Creativity, 2016/7/13.
- [5] ———, *The perturbation of the Seiberg-Witten equations*, Tohoku Forum for Creativity, 2016/6/28.
- [6] ———, *トポロジカル相と K 理論*, 理化学研究所, 2016/4/28.
- [7] ———, *Gysin maps and bulk-edge correspondence*, CIRM, 2016/4/21.
- [8] ———, *The twisted Seiberg-Witten equations and the Yamabe invariant*, 奈良女子大学, 2016/3/22.
- [9] ———, *Bulk-edge correspondence and the Gysin map in K -theory*, AIMR, 2015/3/23, 2015/3/24, 2015/3/25.
- [10] ———, *The perturbation of the Seiberg-Witten equations revisited*, 東京大学, 2015/3/17.
- [11] ———, *The bulk-edge correspondence for topological insulators and the Gysin map in K -theory*, IPMU, 2014/11/6.
- [12] ———, *The prescribed scalar curvature problem*

for metrics with total unit volume, 信州菅平高原,
2013/10/31.

- [13] ———, 四次元開多様体と反自己双対接続と局所平均次元, 東京工業大学, 2013/8/26.
- [14] ———, *The Cauchy-Riemann equations, the ASD equations, and mean dimension*, RIMS, 2013/7/9.
- [15] ———, *Brody curves and mean dimension*, 東京大学, 2013/5/2.

6 研究組織

6.1 研究代表者

松尾 信一郎 (Matsuo, Shinichiroh)

所属研究機関：名古屋大学

部局：多元数理科学研究科

職：准教授

研究者番号：40599487