

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800047

研究課題名(和文)ワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の大域的性質と特異点の研究

研究課題名(英文)Global properties of surfaces which possess the Weierstrass type representation formulae and their singularities

研究代表者

藤森 祥一 (Fujimori, Shoichi)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：00452706

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：ワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の大域的性質と特異点の振る舞いを調べた。3次元ユークリッド空間の周期的極小曲面のモデュライ空間とその退化極限に関する新しい結果を得た。また、3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面と時間的極小曲面が混在する平均曲率0曲面の族を大量に構成した。またそのうちのいくつかについては曲面が埋め込まれていることも証明した。さらに平均曲率0曲面と2次元流体力学の関係についても考察を行った。

研究成果の概要(英文)：The global properties of surfaces which possess Weierstrass type representation formulae and their singularities were investigated. For periodic minimal surfaces in Euclidean 3-space, the moduli space and its degenerate limits were studied. For zero mean curvature surfaces with mixed causal type in Minkowski 3-space, many families of such surfaces were constructed, and the embeddedness of some of them were proved. Moreover, relation between zero mean curvature surfaces and 2-dimensional fluid mechanics was observed.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ワイエルストラス型表現公式 極小曲面 極大曲面 平均曲率0曲面 特異点

1. 研究開始当初の背景

本研究ではワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の大域的な性質とその特異点の振る舞いを調べた。ワイエルストラス型表現公式とは、ここでは与えられた複素解析的データから得られる線形常微分方程式系を解く（あるいは単に積分する）ことによって曲面を表現する公式のこととする。具体的には3次元ユークリッド空間の極小曲面、3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面および（空間的部分と時間的部分が混在する）平均曲率0曲面等を研究対象とする。

3次元ユークリッド空間の極小曲面については古来多くの研究が行われているが、曲面の分類に関しては未解決の問題も多く残っている。

3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面については15年程前からある種の特異点を許容したクラスの大域的性質や特異点の分類などの研究が大きく進展している。一方、空間的部分と時間的部分が混在する平均曲率0曲面についてはいくつかの基本的な例が知られているのみで研究はほとんど行われていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の特異点および大域的性質を調べることである。上述のワイエルストラス型表現公式をもつ曲面は、大域的な性質は大きく異なっており、ミンコフスキー空間の空間的極大曲面は完備な例が平面しかなく、従ってある種の特異点を許容した上での研究が不可避である、という性質を持つが、局所的にはどちらも複素解析的データから構成することができ、多くの共通する性質も持っている。これらの曲面に不変な性質や、どちらかの曲面のみがもつ特別な性質を解明することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 3次元ユークリッド空間の極小曲面について：周期的な極小曲面のモデュライ空間とその境界に関する研究を行う。特に3重周期的な極小曲面の族の退化極限として現れる極小曲面の分類や、与えられた極小曲面に収束する極小曲面の族の構成を試みる。

(2) 3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面および（空間的部分と時間的部分が混在する）平均曲率0曲面について：空間的極大曲面の中で折り目特異点と呼ばれる特異点のみを許容するものの構成および一般論の確立を試みる。このような曲面は折り目特異点に沿って曲面を実解析的に拡張することができ、拡張された部分は時間的極小曲面になることが知られているからである。このようにして得られる平均曲率0曲面の大域的性質を調べ、埋め込まれた例を多く構成することを試みる。

4. 研究成果

(1) 江尻典雄氏、庄田敏宏氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間の3重周期的極小曲面の族の退化極限に関する研究を行った。特にロドリゲスの標準例と呼ばれる2重周期的極小曲面の3径数族がMeeks族と呼ばれる3重周期的極小曲面の5径数族の極限として得られることを示し、3重周期的極小曲面から2重周期的極小曲面、単周期的極小曲面、非周期的極小曲面へと退化する具体例を構成した(図1)。

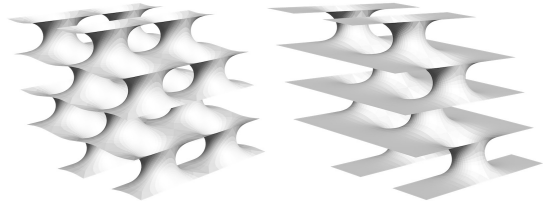


図1. 左: 3重周期的極小曲面(ミークス族). 右: 左の曲面の極限として得られる2重周期的極小曲面(ロドリゲスの標準例)。

(2) Wayne Rossman氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏、Seong-Deog Yang氏との共同研究で、3次元ミンコフスキー空間の3重周期的な平均曲率0曲面の1径数族を構成した。これまで知られていた平均曲率0曲面は全て平面と同相であったが、我々の構成した例は3重周期的であり、その1周期分を3次元トーラスの中の曲面と見なすと曲面は種数3の閉曲面と同相である。また、ここで構成した1径数族の曲面は全て埋め込まれていることも証明した(図2)。

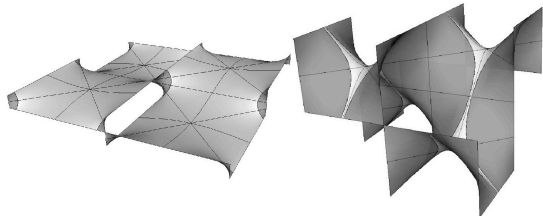


図2. 3次元ミンコフスキー空間に埋め込まれた3重周期的平均曲率0曲面の族。白い部分が空間的極大曲面、黒い部分が時間的極小曲面である。

(3) Young Wook Kim氏、Sung-Eun Koh氏、Wayne Rossman氏、Heayong Shin氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏、Seong-Deog Yang氏との共同研究で、3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面で折り目特異点をもつものに関する研究を行った。折り目特異点の像が光的直線かまたは非退化な光的曲線の場合に、特異点に沿って曲面を実解析的に拡張できることを考察し、光的直線に沿って型変化する例など、いくつかの基本的な例を構成した。また、平均曲率0曲面が満たす偏微分方程式と2次元流体力学との関係についても考察を行った。

(4) 川上裕氏、國分雅敏氏、Wayne Rossman

氏, 梅原雅顕氏, 山田光太郎氏との共同研究で, 3次元ミンコフスキー空間の平均曲率0曲面の例を構成した. 特にジョルジュ・ミークス型と呼ばれる埋め込みの1径数族や全平面で定義された平均曲率0グラフの族を大量に構成した(図3).

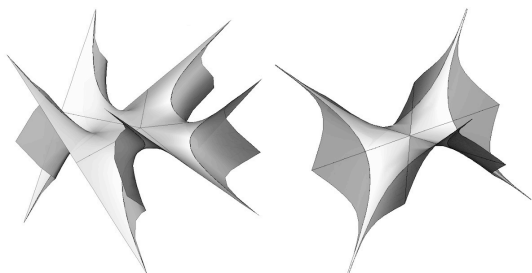


図3. 左: ジョルジュ・ミークス型平均曲率0曲面. 右: 全平面で定義された平均曲率0グラフ. どちらも白い部分が空間的極大曲面, 黒い部分が時間的極小曲面である.

(5) Samah Gaber Mohamed 氏, Mason Pember 氏との共同研究で, 3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面で種数の高いものを構成した. また, ここで構成した曲面の周期条件がある種の非退化性を持つことを示し, その性質を用いて曲面を3次元ド・ジッター空間の空間的平均曲率1曲面へ変形させることに成功した.

(6) 野呂正行氏, 佐治健太郎氏, 佐々木武氏, 吉田正章氏との共同研究で, ガウスの超幾何微分方程式のド・ジッター・シュバルツ写像に関する研究を行った. ド・ジッター・シュバルツ写像は佐々木氏, 吉田氏を中心に研究されている双曲シュバルツ写像の双対にあたるものであり, 3次元ド・ジッター空間の(特異点付き)空間的平坦曲面と見なすことができる. この空間的平坦曲面の特異点および平行曲面の焦曲面について考察した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

① Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, and Kotaro Yamada, Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space, Osaka Journal of Mathematics (印刷中), 査読有.

② Shoichi Fujimori, Samah Gaber Mohamed, and Mason Pember, Maximal surfaces in Minkowski 3-space with non-trivial topology and corresponding CMC 1 surfaces in de Sitter 3-space, Kobe Journal of Mathematics, 33 (2016), 1--12, 査読有, DOI 無.

③ Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, and Kotaro Yamada, Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space, The Quarterly Journal of Mathematics, 67 (2016), 801--837, 査読有, DOI: <https://doi.org/10.1093/qmath/haw038>.

④ Shoichi Fujimori and Toshihiro Shoda, Minimal surfaces with two ends which have the least total absolute curvature, Pacific Journal of Mathematics, 282 (2016), 107--144, 査読有, DOI: 10.2140/pjm.2016.282.107.

⑤ Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, and Toshihiro Shoda, A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3, Topology and its Applications, 196 (2015), 880--903, 査読有, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.05.014>.

⑥ Shoichi Fujimori, Masayuki Noro, Kentaro Saji, Takeshi Sasaki, and Masaaki Yoshida, Schwarz maps for the hypergeometric differential equation, International Journal of Mathematics, 26 (2015), 1541002, 31 pp, 査読有, DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0129167X15410025>.

⑦ Shoichi Fujimori, Computer graphics in minimal surface theory, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis II, Mathematics for Industry 18, Springer (2015), 9--18, 査読有, DOI: 10.1007/978-4-431-55483-7_2.

⑧ Shoichi Fujimori, Young Wook Kim, Sung-Eun Koh, Wayne Rossman, Heayong Shin, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, and Seong-Deog Yang, Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line, Osaka Journal of Mathematics, 52 (2015), 285--297, 査読有, <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1427202882>.

⑨ Shoichi Fujimori, Young Wook Kim, Sung-Eun Koh, Wayne Rossman, Heayong Shin, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, and Seong-Deog Yang, Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics, Mathematical Journal of Okayama University, 57 (2015), 173--200, 査読有, http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou/mjou57/_11_fujimori.pdf.

⑩ Shoichi Fujimori, Wayne Rossman,

Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, and Seong-Deog Yang, Embedded triply periodic zero mean curvature surfaces of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space, Michigan Mathematical Journal, 63 (2014), 189--207, 査読有, DOI:10.1307/mmj/1395234364.

〔学会発表〕(計 5 件)

- ① 藤森祥一, 2つのエンドを持つ極小曲面の全曲率, 第 63 回幾何学シンポジウム, 2016 年 8 月 30 日, 岡山大学(岡山県岡山市).
- ② 藤森祥一, 3次元 Lorentz-Minkowski 空間の平均曲率 0 曲面, 研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」, 2016 年 6 月 27 日. 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).
- ③ 藤森祥一, 川上裕, 國分雅敏, Wayne Rossman, 梅原雅顕, 山田光太郎, Jorge-Meeks 型極大曲面の解析的延長, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年 9 月 13 日, 京都産業大学(京都府京都市).
- ④ 江尻典雄, 藤森祥一, 庄田敏宏, 3重周期的極小曲面の退化極限, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学(広島県東広島市).
- ⑤ 藤森祥一, 3次元 Lorentz-Minkowski 空間内の平均曲率 0 埋め込み, 日本数学会秋季総合分科会, 幾何学分科会特別講演, 2013 年 9 月 26 日, 愛媛大学(愛媛県松山市).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~fujimori/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤森 祥一 (FUJIMORI, Shoichi)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号: 00452706

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし