

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 20 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800048

研究課題名(和文) ハンドル分解を用いた4次元多様体の微分構造の研究

研究課題名(英文) Research on smooth structures on 4-manifolds using handle decompositions

研究代表者

安井 弘一 (YASUI, Kouichi)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：70547009

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：同一の接触3次元多様体の互いにエキゾチックな(即ち同相だが微分同相でない)無限個のStein fillingを構成するアルゴリズムを与えた。また、互いにエキゾチックな4次元多様体の対を表示する枠付き結び目の対の組織的構成法を与えた。応用として結び目コンコーダンスに関するAkbulut-Kirby予想を否定的に解決した。その他にも接触5次元多様体や結び目の最大Thurston-Bennequin数に関する成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We gave an algorithm which produces infinitely many pairwise exotic (i.e. homeomorphic but non-diffeomorphic) Stein fillings of the same contact 3-manifolds. We also gave a method for producing pairs of framed knots which represent exotic pairs of 4-manifolds. As an application, we disproved the Akbulut-Kirby conjecture on knot concordance. We also obtain results on contact 5-manifolds and maximal Thurston-Bennequin numbers of knots.

研究分野：位相幾何学

キーワード：トポロジー 4次元多様体 微分構造 ハンドル分解 Stein構造 接触構造 コルク 結び目

1. 研究開始当初の背景

本研究課題の主な研究対象は4次元多様体の微分構造である。4次元多様体の微分構造の研究は1980年代のFreedman理論とDonaldsonによるゲージ理論の登場によって劇的な進展を遂げた。しかし5次元以上の高次元や3次元以下の低次元と違い、4次元の場合は未だに全体の様相が捉えられず、様々な良い具体例が必要とされている。特に、与えられた4次元多様体に対する(無限個の)エキゾチック(即ち同相だが微分同相でない)微分構造の存在問題は4次元トポロジーの主要テーマの一つである。

2. 研究の目的

本研究の主な目的は4次元多様体の微分構造の様相を探ることである。本研究課題の申請時におけるより具体的な目的は、主に以下の3つであった。(i) 4次元多様体のコルク構造の研究、(ii) 4次元多様体のエキゾチック微分構造の構成、(iii) 4次元多様体の微分構造を保つ手術の研究。

3. 研究の方法

研究のうち多様体や微分同相写像などの構成に関わる部分は、4次元ハンドル体やその図式、Lefschetz fibrationなどを用いた。多様体の区別・制約などに関わる部分は、ゲージ理論やシンプレクティック幾何に由来する不変量・制約と、ハンドル体や曲面に関する議論とを組み合わせることで行った。

4. 研究成果

以下に主な成果とその背景を述べる。

(1) 接触3次元多様体のエキゾチックなStein充填

Stein 4次元多様体は境界付き4次元多様体の非常に広いクラスを成し、様々な興味深い性質をもつことが知られている。Stein 4次元多様体は、その境界の接触3次元多様体に対するStein fillingとも呼ばれる。また様々な接触3次元多様体に対し、そのStein fillingの個数の有限性や一意性が成立している。そのため接触3次元多様体に対するエキゾチックなStein fillingの存在問題が興味深い。そのような初の例はAkhmedov、Etnyre、Mark、Smith (Math. Res. Lett., 2008) が与え、私とAkbulut (J. Symplectic Geom., 2014) は b_2 の値の非常に小さい例 ($b_2=2$) を与えた。しかしこれらの例はいずれも散発的であり、エキゾチックStein filling がとり得る位相構造の例はわずかだった。

私は、適当な条件をみだす任意のStein 4次元多様体に対し、それと同じ位相不変量を持つ、互いにエキゾチックな無限個のStein filling を与えるアルゴリズムを与えた。特に4次元多様体の位相不変量に関して非常に広いクラスに、同一の接触3次元多様体の互いにエキゾチックな無限個のStein filling

が存在することを示した。なおこの結果を得るために positive allowable Lefschetz fibration (PALF) のある改変操作を開発した。

私はさらに応用として、種数1の無限個のエキゾチックなPALFの存在を示した。この結果は S^2 上の種数1のLefschetz fibration にエキゾチックなものが存在しないという古典的事実と対照的である。また、無限個のStein filling を持つ接触3次元多様体のサポート種数を初めて決定した。なおこれらの成果はプレプリントとしてarXivで公表している(arXiv:1406.0050, 2014)。

(2) 接触3次元多様体のcapとsymplectic fillingのトポロジー

接触3次元多様体のsymplectic fillingやStein fillingの個数が有限個あるいは無限個になるような接触3次元多様体の例は、どちらの場合も様々なものが知られている。そのため有限性あるいは無限性を持つ接触3次元多様体の特徴付けは興味深い問題である。

私とTian-Jun Li氏、Cheuk Yu Mak氏はuniruled cap、adjunction cap、Calabi-Yau capという3つのcapのクラスを導入し、それらの境界の接触3次元多様体に対して、symplectic fillingあるいはStein fillingのベッチ数の個数の有限性が成立することを示した。我々の知る限り、ベッチ数の個数の有限性を持つ接触3次元多様体の既知の例は全てこれらのいずれかのクラスに属している。また応用としてStein fillableな接触3次元多様体であって、Stein fillingについてはベッチ数の個数の有限性が成立するが、symplectic fillingについては成立しないようなものが存在することを示した。以上の成果はプレプリントとしてarXivで公表している(arXiv:1412.3208, 2014)。

(3) 接触5次元多様体のオープンブックと4次元エキゾチックStein filling

4次元多様体上のStein構造は5次元オープンブックを経由することで5次元多様体上の接触構造を与えることが知られている。4次元トポロジーの観点からは、Stein 4次元多様体の微分構造と5次元多様体の接触構造の間の関係が興味深い。

私とAkbulut氏は同一の接触5次元多様体が互いにエキゾチックなStein fillingをページに持つ無限個のオープンブック分解を持ち得ることを示した。特に、接触3次元多様体のStein fillingの微分構造の違いが5次元多様体上の接触構造に反映されるとは限らないことを示した(Math. Res. Lett., to appear)。

(4) エキゾチック枠付き結び目と結び目コンコードダンス

枠付き結び目によって表示される4次元多様体は基本的な研究対象であり、特に境界の

3次元多様体は結び目理論で活発に研究されている。互いにエキゾチックな4次元多様体対を表示する枠付き結び目の対(エキゾチック枠付き結び目対と呼ぶ)の初の例は Akbulut (J. Differential Geom., 1991) によって与えられ、その後 Kalmar-Stipsicz (Algebr. Geom. Topol., 2013) によって無限個の組に拡張された。しかしこれらの例は散発的であり、また枠が-1の場合に限られていた。

私はコルクとサテライト写像を用いることで、エキゾチック枠付き結び目対の組織的構成法を与えた。特に全ての枠に対し、エキゾチック枠付き結び目対を無限組与えた。応用として「2つの結び目が0手術で同じ3次元多様体を生むならば、それらはコンコダントである」という、結び目理論で重要な1978年の Akbulut-Kirby 予想(Kirbyの問題1.19)を否定的に解決した。以上の成果はプレプリントとして arXiv で公表している(arXiv:1505.02551, 2015)。

(5) Stein 構造を持たない4次元多様体と最大 Thurston-Bennequin 数

Stein 構造を持たないコンパクト可縮4次元多様体の存在問題は、エキゾチック4次元球面の存在問題とも密接に関わる重要な問題である。ところで、枠付き結び目で表示される4次元多様体は、枠がその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満ならば、Stein 構造を許容することがよく知られている。しかし、この逆が成立するか否かは未解決問題である。

私は2つの命題「全てのコンパクト可縮4次元多様体はStein構造を持つ」と「枠付き結び目で表示される4次元多様体がStein構造を持つならばその枠はその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満である」のうち少なくとも一方は偽であることを示した。さらに一方の命題が真ならば他方の問題に対する無限個の反例が存在することを示した(J. Symplectic Geom., to appear)。

(6) 最大 Thurston-Bennequin 数と可約 Legendre 手術

結び目不変量である最大 Thurston-Bennequin 数は、接触構造や4次元多様体を經由することで低次元トポロジーに様々な応用を持つことが知られている。しかし最大 Thurston-Bennequin 数の値の決定は一般に非常に困難な問題である。

私は4次元Steinハンドル体を用いることで、最大 Thurston-Bennequin 数の新しい決定法を開発した。特に既存の方法では決定不可能に思われる多数の例に対して、最大 Thurston-Bennequin 数を決定した。応用として、「結び目の Legendre 手術で得られる3次元多様体は既約である」という Lidman-Sivek の予想(Compositio Math., 2016)を否定的に解決した(Compositio Math.,

to appear)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

(1) Kouichi Yasui, Maximal Thurston-Bennequin number and reducible Legendrian surgery, Compositio Mathematica, to appear, 査読有。

(2) Kouichi Yasui, Nonexistence of Stein structures on 4-manifolds and maximal Thurston-Bennequin numbers, Journal of Symplectic Geometry, to appear, 査読有。

(3) Selman Akbulut and Kouichi Yasui, Contact 5-manifolds admitting open books with exotic pages, Mathematical Research Letters, to appear, 査読有。

(4) Selman Akbulut and Kouichi Yasui, Infinitely many small exotic Stein fillings, Journal of Symplectic Geometry, 12 (2014), 673-684, 査読有。

(5) Selman Akbulut and Kouichi Yasui, Gluck twisting 4-manifolds with odd intersection form, Mathematical Research Letters, 20. no. 2 (2013), 385-389, 査読有。

[学会発表](計22件)

(1) 安井弘一, Stein 4次元多様体の微分構造と5次元多様体の接触構造, 微分トポロジー16, 2016年3月22日, 筑波大学(茨城県つくば市)。

(2) 安井弘一, Maximal Thurston-Bennequin number and reducible Legendrian surgery, 日本数学会2016年度年会, 2016年3月18日, 筑波大学(茨城県つくば市)。

(3) 安井弘一, Nonexistence of Stein structures on 4-manifolds and maximal Thurston-Bennequin numbers, 日本数学会2016年度年会, 2016年3月18日, 筑波大学(茨城県つくば市)。

(4) 安井弘一, Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016, 2016年3月10日, 広島大学(広島県東広島市)。

(5) 安井弘一, Contact 5-manifolds admitting open books with exotic Stein pages, 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺, 2016年1月23日, 金沢大学(石川県金沢市)。

(6) 安井弘一, Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance, 研究集会「4次元トポロジー」, 2015年11月21日, 大阪市立大学(大阪府大阪市).

(7) Selman Akbulut, 安井弘一, Contact 5-manifolds admitting open books with exotic Stein pages, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会, 2015年9月15日, 京都産業大学(京都府京都市).

(8) 安井弘一, Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会, 2015年9月15日, 京都産業大学(京都府京都市).

(9) 安井弘一, Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance, Friday Seminar on Knot Theory, 2015年6月26日, 大阪市立大学(大阪府大阪市).

(10) 安井弘一, Exotic 4-manifolds and non-concordant knots with the same 0-surgery, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 2015年4月21日, 広島大学(広島県東広島市).

(11) 安井弘一, Partial twists and exotic Stein fillings, 微分トポロジー15~微分トポロジーの過去・現在・未来~, 2015年3月25日, 京都大学(京都府京都市).

(12) Kouichi Yasui, Partial twists and exotic Stein fillings, Topology Seminar, 2014年11月14日, Kansas State University, マンハッタン(アメリカ).

(13) Kouichi Yasui, Corks and exotic smooth structures on 4-manifolds, Colloquium, 2014年11月13日, Kansas State University, マンハッタン(アメリカ).

(14) Kouichi Yasui, Partial twists and exotic Stein fillings, Topology Seminar, 2014年10月6日, Michigan State University, イーストラランシング(アメリカ).

(15) Kouichi Yasui, Partial twists and exotic Stein fillings, Differential Geometry and Symplectic Topology Seminar, 2014年9月25日, University of Minnesota, ミネアポリス(アメリカ).

(16) Kouichi Yasui, Partial twists and exotic Stein fillings, Workshop on Topology and Invariants of 4-Manifolds, 2014年8月26日, Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University, ニューヨーク(アメリカ).

(17) 安井弘一, Partial twists and exotic Stein fillings, 東工大トポロジーセミナー, 2014年7月9日, 東京工業大学(東京都目黒区).

(18) 安井弘一, Partial twists and exotic Stein fillings, 広島大学トポロジー・幾何セミナー, 2014年6月24日, 広島大学(広島県東広島市).

(19) 安井弘一, Partial twists and exotic Stein fillings, 幾何学コロキウム, 2014年6月13日, 北海道大学(北海道札幌市).

(20) 安井弘一, Partial twists and exotic Stein fillings, 日本数学会 2014年度年会, 2014年3月16日, 学習院大学(東京都豊島区).

(21) 安井弘一, Stein 構造の4次元多様体への応用についてII, 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺, 2014年1月10日, 高知市文化プラザかるぼーと(高知県高知市).

(22) 安井弘一, Stein 構造の4次元多様体への応用についてI, 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺, 2014年1月9日, 高知市文化プラザかるぼーと(高知県高知市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安井 弘一 (YASUI Kouichi)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号: 70547009