様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　6 月 27 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００４９

研究課題名（和文）カンドルの特性類とその低次元トポロジーへの応用

研究課題名（英文）Characteristic classes of quandles, and its applications to low dimensional topology

研究代表者

野坂　武史（Takefumi, Nosaka）

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：００６４６９０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：研究主題は"カンドル”という代数である．本目標は幅広い視点・手法でもってカンドル理論をさらに開り拓く事で，本研究によって低次元トポロジーに幾つか応用を与えました．例えば閉３次元多様体，(曲面)結び目，分岐被覆空間，レフシェッツ束，曲面ブレイドが挙げれます．カンドルの研究は未知の部分も多いですが，カンドルにはホモトピー論，群コホモロジー，ボルディズム群，不変式論，代数K理論などが有用な事が解ってきた．また予想外の進展として、カンドルが２次特性類や双線形型式やカップ積に相性よい事を見出した．

研究成果の概要（英文）：The subject of this research is "a quandle", which is an algebraic system. The purpose is to explore quandle theory from broad viewpoints and by many means.
I gave some applications to low dimensional topology, including 3-manifold, (surface) knots, branched covering space, Lefschetz fibrations, and surface braids. The study of quandle contains many mysterious areas; however, I showed that homotopy theory, group cohomology, bordism groups, invariant theory, algebraic K-theory are useful to quandle theory. Furthermore, as an unexpected development, I also pointed out that quandle theory is compatible with secondary characteristics, bilinear forms, and cup products.

研究分野：トポロジー

キーワード：幾何学　トポロジー　カンドル　結び目　コホモロジー

１．研究開始当初の背景

開始当初まで“カンドル”という代数を中心に研究行ってきた。

今までカンドルの研究は結び目（円周 の 3 次元空間への埋込の事）への応用が多く、ただ組合せ的な手法による使用例が多かった．その為、カンドルの位相的な意味や関係性について未知部分も多かった。また研究手法も系統的に確立されず多くもなかった．

そこで筆者はホモトピカルな手法でカンドルを研究してきた．その研究の鍵は、“カンドル空間”という位相空間の構造や性質を解析する事である。それは代数トポロジーの視点でも興味深い対象である．筆者は、そのホモトピー群の研究により、カンドルが適用可能な位相的対象を広げることに成功した。例えば、3 次元多様体、分岐被覆空間や球面上レフシェッツ束、曲面結び目などがある。加えてカンドルを研究する辺り、ホモトピー論，群コホモロジー，ボルディズム群，不変式論，代数的K理論などが有用な手法である事が解ってきた．

但し、カンドルの手法は幾らか提起されたものの，カンドルへの条件や制限（連結性や有限位数）が多かった。またカンドルを用いた結び目の不変量はまだよく解ってなかった。

２．研究の目的

当面の大きな目標は,さらに幅広い視点・方法をカンドルに適用し、カンドルの応用や活用法を切り拓く事である．ただし当研究期間内では具体的に 次の 3 点を目標にした．

(1) カンドルコサイクル不変量の位相的意味づけ。群ホモロジー観点から

当不変量は 2001 年に定義されたものだが、組合せ的に定義されたため，位相的意味が不明であった．そこで上記の筆者のホモトピカルな結果や手法を基に、その位相的意味づけを与える。またその際に、カンドルのホモロジーと群ホモロジーの関係性も解明する。

(2) 結び目の結び目の A 多項式 Chern-Simons 不変量・代数的 K 理論の関連

2次の代数K群を結び目理論の研究を目指す。今まで結び目理論でK群が使われたものは１次と３次しかなかった。その中間物となる議論の基礎作りを目指す。この際に、そもそも代数K群はホモトピー群で定義されている事も注意する。実際、カンドルのホモトピカルな議論を対比させながら研究手法を提唱する事が出来ると予想される．

(3) 多様体であるカンドルの研究と、それから導来する２次特性類の構成

限位数のカンドル研究として，多様体構造や右G加群を持つカンドル構造を研究対象にする．たとえば等質空間 G/H や多重不変線形形式はカンドルの構造を持つ．さらに，多様体構造を用い，その場合カンドル空間コホモロジーや特性類を解明したい．さらにはカンドルの２次特性類の発見を目標とする。

３．研究の方法

上記の(1)(2)(3)に応じて、研究法を述べる。

まず(1)において「カンドル分岐被覆論」の基礎固めを行った後、位相的意味をカンドルから取出す理論・手法を築く構想をしていた。その際に次の２つを明らかにする。つまり〝カンドル空間の基本群”を決定する手法を築き、さらにカンドルの普遍中心拡大について理論を整備する事である。これにより、カンドル空間のホモトピー群に現れる障害を克服する（正しくは直和分解を見抜く）事が出来、容易に目標の位相的意味合いを導く。

(2) 次に、代数 K2 群の研究に当たり、K1 群や K3 群に値を持つ既存の不変量を参考にする(其々，捩れアレクサンダー多項式や複素体積と呼ばれる)。その際すこし概念拡張した〝F上のミルナー･ウィットK群”が結び目理論と相性が良い事が解った。その K2 群の数論的な諸結果を対比しながら、研究を進める．その際に、結び目の“緯線”が難点となるが、その克服法として、カンドル理論を用い緯線の群論的な非可換的表示を簡略化することにする。

(3) 次にカンドルの特性類を発見する研究方法を述べる．簡略して述べれば、群の特性類を似させ，Enriched Chern-Weil 理論を四角化する事である．ここでその理論とは、群と三角形を貼合せた空間（simplicial set という)の微分形式から,或る微分方程式を立て，その解を特性類とするものであった．一方、前述のカンドルの分類空間は カンドルの分類空間は，カンドルと四角形を貼合せた空間として定義されていた。標語的に手法をまとめると、三角形の既存の議論を四角形に取り入れることである。

４．研究成果

(1) カンドルコサイクル不変量の位相的意

味づけに関しての成果を３項目で述べる。

①下記の雑誌論文[4]では、目標である位相的意味づけに、満足いくほど成功した。ここでカンドルに”連結で有限位数”という条件が必要だが、有用な例を多くある。この研究のインパクトのある点は、位相的意味づけを与える時にホモトピー論を主要に用いた点と、これまで組合せ的に思われていた対象が位相的意味をもち解釈された点である。また本結果が意味する事は、コサイクル不変量の計算が、その位相的意味づけられた量を計算していたことになる。

この研究の応用として、この論文では、カンドルの３次ホモロジー群や、カンドル空間の２次ホモトピー群の計算手法も与えた。これにより新しい具体的な計算例を数種類あたえた。

② 雑誌論文[3] では、群から出来るカンドルのみに限定し、さらに研究を推し進めた。このカンドルのクラスに対して、群ホモロジーとカンドルホモロジーを３次の場合に繋げる結果を得ることが出来た。より詳しく述べると、ある捩れ部分のパートは同型を与える事が解った。特にカンドルの普遍中心拡大に対して、より良い結果を与えた。その系として、そのクラスが既存のカンドルの結果を幾つか包含していることを示した。〝望月氏のカンドル３コサイクル”について、マッセイ積との関連も示すことが出来た。

③ また次のプレプリントで、研究手法にて述べたカンドルの中心拡大と〝カンドル空間の基本群”を決定する手法を提唱した：

T. Nosaka, Central extensions of groups and adjoint groups of quandles,

この主定理は、カンドルが連結という条件の時、その基本群がある捩れ部分群を除いて普遍的な中心拡大であることを示した。この定理は具体的なカンドルに有用であることも示した。実際、この論文では古典的な群との関連を陳述し、カンドル空間の基本群を幾らか決定した。この系として、カンドルの２次ホモロジー群も計算した。この計算例は、①でのホモトピー群と３次ホモロジー群の計算に役立っている。

(2) 雑誌論文[2] では K2 群に値を持つ，結び目の不変量を構成した．正確には，任意の無限体 F に対し，結び目の SL2(F)-放物表現に関し，Milnor-Witt K2 群への値を構成した．以下，この不変量に関する結果を述べる．まず当不変量の非自明な例が無数に存在することを証明した．そして実際，K2 群に関する数論の結果を用いる事で，非自明な値をもつ結び目表現を多く例示できた．ここでこれらの計算の際，結び目論に数論の(特に可換類対論や K2-群の) 結果を用いた点は斬新であり不変量の深さを予感させる．

また本研究では二つ応用を与えた．即ち，第一に，放物表現の〝cusp shape”（双曲幾何では古典的な量）に関する状態和公式を表示し，その成果，cusp shape の計算を容易にした．第二に，〝左不変順序構造を持つ”3 次元多様体の基本群について新しい例示を与える事も出来た，その順序構造の例示は近年話題である〝L-空間予想”に肯定的な例証を広げた事になる．

(3) 雑誌論文[1] では，この論文では，3 次元結び目に関する相対カップ積を研究した．主定理は「その任意の局所系でのカップ積に関して図的計算法を与えた」事である．この際に、Chern-Weil 理論(不変多重線形から特性類を構築する方法)が参考になっている。カップ積は長い歴史を持つが，定義が厄介で思弁的なものと思われた.しかし，この定理はカップ積を定量的な計算可能なものにし具体性を与えたため，カップ積とカンドルの印象を一新させるものと思われる．

またこの結果の応用として，捩れアレクサンダー加群”というものの上に双線形型式の構造を定義する事に成功した．さらに，具体的な計算例も提示し，カップ積の複雑さを例示することが出来た．

この結果より得られた新たな知見を得ることが出来た。つまり「カンドル理論は、既存の位相的な不変量に対して２次元的な図的計算法を提唱させるのに有用である」との研究方針を示せた。実際に、この方針に基づき、図的計算法を与える事に成功し、プレプリントを既に作成し公開している。例えば次がある：

T. Nosaka, On the fundamental relative 3-classes of knot group representations;

(4)また予想外の成果として、局所系カップ積という設定から，次のふたつの古典的な結び目不変量を復元する事を証明した．結び目の Blanchfield ペアリングと，Casson-Gordon 局所符号数の差分の事である．この結果と前論文を組み合わせる事で，その不変量に図的計算法を与えたことになる．実際，この例として，トーラス結び目の Blanchfiled ペアリングを初めて決定することに成功した．

ここでの難題は、可換被覆空間上のホモロジー上の交叉理論と、局所系のコホモロジーのカップ積との結び付けである。筆者は可解被覆空間で同様の展開を期待している。上記の結果は良いモデルであり、今後の知見を与えた。

この結果（前論文を融合する事で）その不変量に図的計算法を与えたことになる．この例として，トーラス結び目の Blanchfield

ペアリングを初めて決定することに成功した．加えて本論文では無限巡回被覆空間のカップ積との関連も調べた．またカップ積に関する双対定理を与える事も出来た．また，Goldmann リー代数との関連も論じた．
以上は、次のプレプリントにまとめた：

T. Nosaka, Twisted cohomology pairings of knots II; to classical invariants,

(5) 以上を総評する事柄を記す。
この目標と諸結果が一定評価され，日本数学会から 2016 年度日本数学会賞建部賢弘特別賞を授与された．賞状が少ない数学業界の中で、この賞は１年に３，４人ほどの特別優秀な若手(35 歳以下)に授与される奨励賞である。
　くわえて，Springer 社 から本(正確には，Springer brief シリーズの一つ) の依頼を受け，カンドルについての本を英文で執筆した。この１年内で出版予定である。本書では筆者のカンドル理論の基礎事項を整理し、ここ数年の仕事をまとめたものである。
　この二つの出来事は、国内外においても、カンドルの先駆的な研究をしていた、という位置づけを示唆するものであろう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

[1] T. Nosaka,
Longitudes in SL_2 representations of knot groups and Milnor-Witt K_2 groups of fields,
Annals of K-Theory. Vol. 2 (2017), No. 2, 211--233.

[2] T. Nosaka,
Twisted cohomology pairings of knots I; diagrammatic computation ,
Geometriae Dedicata (2017), 186, 1, 1--22.

[3] T. Nosaka,
Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles,
Topology Appl. 193 (2015) 1--30.

[4] T. Nosaka,
On third homologies of group and of quandle via the Dijkgraaf-Witten invariant and Inoue-Kabaya map,
Algebraic and Geometric Topology 14 (2014) 2655--2692.

〔学会発表〕（計６件）

野坂 武史,「結び目群表現の相対基本類について」2016, 秋期 日 本 数 学 会 トポロジー分科会, 2016 年 9 月 17 日(土), 「関西大学(大阪府吹田市)」

野坂 武史,「写像類群の中心拡大に関する有限表示」,
春季総合分科会　2014 日本数学会 トポロジー分科会, 2015年3月23日,「明治大学(東京都千代田区神田)」

野坂 武史,「Blanchfield pairing と振れ Milnor 符号数の図的計算法」,
春季総合分科会　2014 日本数学会 トポロジー分科会, 2015年3月21日,「明治大学(東京都千代田区神田)」

野坂 武史,「カンドル理論による双線型形式値の低次元位相不変量」,春季総合分科会 2013 日本数学会 トポロジー分科会, 学習院大学, 2014 年 3 月 15 日, 「学習院大学(東京都豊島区目白)」

野坂 武史,「結び目のSL_2表現空間内の経線と, Milnor-Matsumoto-Moore K_2群」,
春季総合分科会　2013 日本数学会 トポロジー分科会, 2014 年 3 月 15 日,「学習院大学(東京都豊島区目白)」

野坂 武史, 「カンドルコサイクル不変量の位相的意味 I, II」
冬季総合分科会　2012 日本数学会 トポロジー分科会, 2012 年 3 月 20 日,「京都大学(京都市左京区)」

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.titech.ac.jp/~nosaka/self-intro.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　野坂 武史　　(Takefumi Nosaka)
　九州大学 数理学研究院・助教

　研究者番号：00646903

(2)研究分担者　　なし

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９（共通）

(3)連携研究者　　なし