

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 27 日現在

機関番号：37111
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2013～2016
 課題番号：25800050
 研究課題名(和文) ケーラー・アインシュタイン計量の双有理幾何学的研究

 研究課題名(英文) Kahler-Einstein metrics and birational geometry

 研究代表者
 佐野 友二 (Sano, Yuji)

 福岡大学・理学部・教授

 研究者番号：00399792
 交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は2つの課題に対して以下のような結果を得た。
 (1) トーリック・ファノ多様体において、運動量写像の像の多面体の重心に対する極双対に相当すると期待されるファノ多面体の不変量を用いて(技術的な仮定のもと)ケーラー・アインシュタイン計量の存在性(またはK安定性)がより簡単に確かめられることを示した。
 (2) Donaldsonによる偏極多様体上の定スカラー曲率ケーラー計量のbalanced計量を用いた量子化を、微分幾何的なアプローチで端的ケーラー計量の場合に相対的balanced計量を用いて拡張した。特に端的ベクトル場に対する量子化を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this research, we achieved the following two results.
 (1) For a given toric Fano manifold, we introduced an invariant of a Fano polytope which is likely to be a polar dual of the barycenter of the image under the moment map on a given toric Fano manifold. Under some assumption, it induces a simpler criterion for the existence of Kahler-Einstein metrics (or K stability) on a toric Fano manifold.
 (2) With a differential geometrical approach, we extended the moment map interpretation for balanced metrics to relative balanced metrics. Then, it implies the quantization of the extremal metrics and the extremal vector fields on a polarized manifold.

研究分野：ケーラー幾何学

キーワード：ケーラー・アインシュタイン計量 K安定性 トーリックファノ多様体 端的ケーラー計量 balanced計量

1. 研究開始当初の背景

与えられたファノ多様体上に、いつケーラー・アインシュタイン計量が存在するかという問題は複素微分幾何(ケーラー幾何)において重要な未解決問題の一つであった(本研究の構想時)。第1チャーン類が非正の場合にはケーラー・アインシュタイン計量は常に存在することが示されていた(Aubin, Yau)が、正の場合には存在性に対する障害(松島, 二木)によってケーラー・アインシュタイン計量が必ずしも存在するとは限らないことが知られていた。よって上記の存在問題は、ケーラー・アインシュタイン計量が存在しないときの障害をいかに定式化するかと言える。この問題は、Yau, Tian, Donaldson らによって次のように定式化された(Yau-Tian-Donaldson 予想): 偏極多様体上に定スカラー曲率計量が存在することと多様体が K 安定であることは同値である。ケーラー・アインシュタイン計量はスカラー曲率一定なので、上記の予想はケーラー・アインシュタイン計量の存在問題を含む。これはベクトル束のエルミート・アインシュタイン計量と安定性の対応(小林-Hitchin 対応)の重力場版と言える。 K 安定性は、ベクトル束の安定性と同様に幾何学的不変式論の観点から導入されたが、偏極多様体のモジュライ空間の研究が難しいように K 安定性がどのようなモジュライ空間を導くのかという問題も難しいと思われる。モジュライ理論の観点から考えると、 K (半)安定多様体の特異点を調べることが重要である。この問題において研究代表者は尾高悠志氏との共同研究において大域的ログ標準閾値(global log canonical threshold)が次元のみに依存する定数より大きい場合に K 安定性を導くことを示した。これは Tian によるアルファ不変量とケーラー・アインシュタイン計量の関係の代数幾何版と言える。この結果により双有理幾何学における特異点のマイルドさが K 安定性と関係あることが示された。(本研究が開始された直後、Chen-Donaldson-Sun, Tian らにより、ファノ多様体における Yau-Tian-Donaldson 予想は肯定的に解決された。)

2. 研究の目的

本研究の構想当時の目的は、ケーラー・アインシュタイン計量の存在問題を双有理幾何学の観点から研究することにあった。特に、双有理幾何の手法を用いて K 安定性の YTD 予想における妥当性の検討などを目的とした。しかし、1. で述べた通り、研究開始直後にファノ多様体における YTD 予想は肯定的に解決されたため、目的を以下の通りに修正した。YTD 予想の解決により、ケーラー・アインシュタイン計量の存在条件は K 安定性によって記述されることがわかるが、一方で K 安定性を定

義に従って示すことは非常に難しい問題として残る。そこで、 K 安定性をより判定可能な条件に言い換えられるかという問題の解決を本研究の目的とした。特にトーリック・ファノ多様体に限定することで K 安定性を組み合わせ論的な条件で記述できるのではないかと考え、さらに得られた結果を双有理幾何学など既存の幾何学の枠組みで再解釈することを試みた。

3. 研究の方法

多様体をトーリック・ファノ多様体に限定し、 K 安定性の条件を組み合わせ論的な条件で記述する。この場合、 K 安定であることは、対応する運動量写像の像の多面体の重心が原点である(満洲, Wang-Zhu の結果)ことがわかる。特に反標準束で偏極されたトーリック・ファノ多様体は反射的多面体と呼ばれる特別な多面体により特徴付けられる。これにより運動量写像の像による多面体とその極双対にあたる扇による多面体は同等の情報量を持つ。よって、運動量写像の像の重心が原点であるという条件を、その極双対多面体の情報で記述する。極双対多面体はトーリック多様体の代数幾何的情報に対応していることから、得られる結果は既存の代数幾何で解釈できることが期待される。

4. 研究成果

本研究は、 K 安定性の双有理幾何学的理解を得ることを目的として、それに関する以下の結果を得た。

- (1) トーリック・ファノ多様体の運動量写像の像の重心条件の極双対多面体の情報を用いた記述を得た。具体的には、トーリック・ファノ多様体の運動量写像の像の重心の極双対に相当すると思われる、極双対多面体の不変量を見つけ、重心との関係を調べた。特に、多様体のピカル数(運動量写像の像の多面体の余次元 1 の面の数)が小さいときに、重心が原点であれば極双対多面体の不変量が消滅することを示した。新たに発見した不変量は、運動量写像の像の重心をトーリック多様体の扇の空間上の区分的有理式で表した上で多面体の存在問題であるミンコフスキー問題の変種を考えることで得られた。この不変量は運動量写像の像の重心に比べて計算しやすい点で、 K 安定性(またはケーラー・アインシュタイン計量の存在性)を判定しやすいという利点がある。この研究成果はまだ中途であり、以下のような課題がある。

技術的な仮定(ピカル数の条件)を排し一般の場合に拡張する。上述のミンコフスキー問題の観点から考えるとピカル数の条件は技術的に過ぎず、重心条件

と新たな不変量の消滅条件は完全に対応していることが予想される。しかしながら、その双対性が非自明であるために証明には至らなかった。

問題設定の拡張をする。ミンコフスキー問題の観点から考えると、期待される重心と新たな不変量に対応の予想は、低次元の重心へも拡張される。この場合、解析はより複雑になることが予想されるが、より統一的な知見が得られると期待される。

新たな不変量の幾何的な解釈を得る。新たに得た不変量は組み合わせ論的な視点から導入された。研究代表者が調べた範囲では、このような不変量が用いられた先行結果はないように思われる。よってその幾何的な意味はまだ明らかではない。しかしトーリックの場合重心条件が多様体の K 安定性と同値であることを考慮すると、不変量は K 安定性と関係していることが期待される。

- (2) ケーラー・アインシュタイン計量の一般化である Calabi の端的ケーラー計量を満洲が導入した相対 balanced 計量を用いて量子化を行った (Carl Tipler 氏との共同研究)。特に先行結果である Donaldson の運動量写像を用いた balanced 計量の特徴付けを相対 balanced 計量の場合に拡張した。これにより、相対 balanced 計量に対して微分幾何的なアプローチを与えることができた。具体的には以下の結果を得た。

balanced 計量を Calabi フローの量子化に相当する

T-iteration と呼ばれる離散力学系の固定点と解釈したとき、その自己相似解が相対 balanced 計量の特別な場合であることを示した。

上記の相対 balanced 計量の特徴付けるエネルギー汎関数を構成し、それが満洲の K エネルギーの量子化であることを示した。その応用として、偏極多様体において端的ケーラー計量が拡張された K エネルギー汎関数の最小値を与えることを証明した。

上記で定義した相対 balanced 計量の特徴付けるエネルギー汎関数を用いて、相対 balanced 計量を運動量写像の零点として特徴付けた。これにより

Donaldson の、balanced 計量による定スカラー曲率計量の量子化の議論を端的ケーラー計量の

場合に直接的に拡張できることを示した。

上の結果の中で、端的ケーラー計量の端的ベクトル場の量子化も得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

Yuji Sano, Carl Tipler, Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy, Journal of European Mathematical Society, 査読あり, vol. 17, 2289-2310 (2015)

[学会発表] (計 9 件)

佐野友二, “端的ケーラー計量と相対的 balanced 計量について” 多変数関数論冬セミナー, 2016.12.16 (福岡工業大学)

佐野友二, “端的ケーラー計量と相対的 balanced 計量について” 福岡大学微分幾何研究集会, 2016.11.03 (福岡大学セミナーハウス)

佐野友二, “ミンコフスキーの問題とファノ多面体” 福岡大学微分幾何研究集会, 2015.10.30 (福岡大学セミナーハウス)

Yuji Sano, “Quantization of extremal metrics and modified K-energy” conference on geometry and quantization (GEOQUANT), 2015.9.17 (ICMAT, Campus de Cantoblanco, Madrid, Spain)

Yuji Sano, “On the extremal vector fields on smooth toric Fano manifolds” The 10th Korean conference on several complex variables, 2014.8.10 (Gyeong-Ju, 韓国)

Yuji Sano, “On the extremal vector fields on smooth toric Fano manifolds” Trends in Modern Geometry, 2014.7.11 (東京大学)

Yuji Sano, “On computations on a bilinear form on toric Fano manifold” The 5th International Workshop on Differential Geometry and Analysis, 2014.6.2 (唐津)

Yuji Sano, “Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy” Extremal Kahler Metrics, 2013.6.1 (Centre de recherches mathematiques, Canada)

佐野友二, “Tian のアルファ不変量
と K 安定性” 第 60 回幾何学シンポ
ジウム, 2013.08.24 (東京工業大学)

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

佐野 友二 (SANO YUJI)

福岡大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 00399792