

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 9 月 28 日現在

機関番号：52501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800053

研究課題名(和文) 離散調和体積を利用したリーマン面のモジュライ空間の局所的な構造の解析

研究課題名(英文) The analysis for the moduli space of Riemann surfaces using the discrete harmonic volume

研究代表者

田所 勇樹 (Tadokoro, Yuuki)

木更津工業高等専門学校・その他部局等・准教授

研究者番号：10435414

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン面のモジュライ空間とは、リーマン面、つまり複素1次元多様体、を双正則同型により同一視した空間である。本研究の目的は、モジュライ空間の局所構造を定量的に理解することである。そのための道具として、古典的に知られているリーマン面の周期行列、および、Chenの反復積分を用いて定義されるリーマン面の調和体積を用いる。

ある超楕円曲線の周期行列に関する直接表示を得た。これまで漸化式としての表示しか知られていなかったものである。副産物として、あるリーマン面の周期行列を導出する数式処理プログラムの作成に成功した。また、具体的な超楕円曲線の点付き調和体積を正則自己同型写像を利用して得ることができた。

研究成果の概要(英文)：The moduli space of compact Riemann surfaces is the space of all biholomorphism classes of compact Riemann surfaces. The period matrix of compact Riemann surfaces is a well-known complex analytic invariant. It enables a quantitative study of the local structure of the moduli space. For generic genus, few examples of period matrices are known. Schindler computed the period matrices of three types of hyperelliptic curves of genus g . One of them contains a recurrence relation. However, we explicitly obtain the period matrix of this curve, its entries being elements of the $(2g+1)$ -st cyclotomic field.

研究分野：トポロジー

キーワード：リーマン面 モジュライ空間 周期行列 調和体積 反復積分 超楕円曲線 写像類群 トポロジー

1. 研究開始当初の背景

0 以上の整数 g に対して, 種数 g の閉 Riemann 面(以下, Riemann 面) X とは, コンパクトな複素 1 次元多様体のことである. 本研究の目的は, モジュライ空間 \mathcal{M} , 種数 g の Riemann 面全体を双正則自己同型により同一視した空間, の局所的な構造を定量的に理解することである. その道具として, Riemann 面 X の複素解析的不変量である周期行列 τ_X と調和体積 v_X を用いる. いずれも, Riemann 面の複素構造のみに依存して定まり, Riemann 面のモジュライ空間 \mathcal{M} の解析に重要な役割を果たす.

周期行列の定義を述べる. 1 次元ホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を a_j, b_j ($j = 1, 2, \dots, g$) とし, X 上の正則 1 形式全体のなすベクトル空間の基底を ω_i ($i = 1, 2, \dots, g$) とおく. ω_i の a_j, b_j に沿ったそれぞれの積分, 周期と呼ばれる, を (i, j) -成分にもつ g 次正方行列をそれぞれ A, B とおく. $\tau_X = A^{-1}B$ を周期行列と呼び, シンプレクティック行列の作用を除けば, 複素構造のみに依存して定まる. τ_X から X のヤコビ代数多様体 $J(X)$ が定義でき, Abel-Jacobi 写像 $X \rightarrow J(X)$ が得られる. 周期行列は古典的によく知られており, g 次 Siegel 上半空間と結びつけるなど様々な角度から研究されている.

調和体積の定義を述べる. X 上の \mathbb{Z} に周期を持つ実調和 1 形式全体を H と定める. 外積代数 $\wedge^3 H$ のある部分加群を $(\wedge^3 H)'$ とおく. 多様体上で定義される Chen の反復積分を用いて, Harris は調和体積を準同型写像 $v_X: (\wedge^3 H)' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ として定めた. v_X は 3 次元トーラス $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ におけるある種の“体積”とみなすことができる. x を X の基点とすると, 点付き Riemann 面 (X, x) に対して, 点付き調和体積も同様に定義される. Pulte と Hain は点付き調和体積と X の基本群 $\pi_1(X, x)$ との関連性をみつけ, 点付き Torelli の定理を示した. この結果は, (点付き)調和体積が Riemann 面の複素構造の違いをとらえていると言える.

周期行列や調和体積はモジュライ空間 \mathcal{M} における変分公式も知られており, \mathcal{M} の局所的な構造を解析するのに適している.

周期行列 τ_X や調和体積 v_X は明示的な計算が可能な複素解析的不変量であり, 具体的な Riemann 面に対して, それらの計算・アルゴリズムなどがいくつか知られている. 周期行列については, 一般の種数をもつ Riemann 面に関する計算は数例のみしか知られていない. 調和体積については, 研究代表者を始めとする研究者達が, 超楕円曲線, Klein 4 次曲線, Fermat 曲線と呼ばれる Riemann 面などに関する結果を得た. その応用として, X のヤコビ代数多様体 $J(X)$ における Ceresa サイクルと呼ばれる代数的サイクルの非自明性を示した.

2. 研究の目的

本研究の目的は, Riemann 面のモジュライ

空間 \mathcal{M} の局所的な構造を定量的に理解することにある. これまでのモジュライ空間の研究は, その大域的な構造を調べてきたと言える. Riemann 面の複素構造に依存して定まる周期行列 τ_X および調和体積 v_X はモジュライ空間上の連続関数とみなせる. 対称性の高い Riemann 面の周期行列および反復積分を利用して, モジュライ空間 \mathcal{M} の局所的な構造, “かたち” の定量的な理解を試みる.

3. 研究の方法

(1) モジュライ空間 \mathcal{M} の特徴的な点, 双正則自己同型群が非自明な具体的な Riemann 面, に関して周期行列を求める. 周期行列を導出するために必要な逆行列の計算を, 数式処理ソフトを利用するなどして, 具体例から一般的な結果を類推する.

(2) 複素射影直線 CP^1 上の 3 点 $0, 1, \infty$ で分岐する巡回分岐被覆で表される Riemann 面を Y と表す. Y の周期行列を求める数式処理プログラムを作成し, 数値計算を実行する. 複素射影直線 CP^1 上における単位区間の持ち上げを用いて Y の 1 次元ホモロジー群 $H_1(Y; \mathbb{Z})$ の基底を記述する. あとは線形代数の基本的な操作を行い, シンプレクティック基底を得ることができる. Y 上の正則 1 形式全体のなすベクトル空間の基底の具体的記述についても知られている. それらを利用すれば周期行列を求めることができる. (1), (2) により, Riemann 面の複素解析的不変量である周期行列を求め, モジュライ空間 \mathcal{M} の局所的な様子を理解できる.

(3) 双正則自己同型群が非自明な具体的な Riemann 面に関して, 双正則自己同型群の作用を利用して点付き調和体積を求める. これはモジュライ空間 \mathcal{M} の理解につながる. 離散 Riemann 面 Λ とは, 種数 g の閉曲面 Σ の多角形分割 Γ , グラフ, とその双対 Γ^* の和集合 $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$ に離散計量を与え, 離散複素構造を導入したものである. この構造は通常複素構造とよく似た性質を持ち, ある種の極限で通常複素構造に近づくことが知られている. 可能ならば, 離散 Riemann 面 Λ を利用して, 各 Riemann 面の \mathcal{M} における近傍の様子を解析する.

4. 研究成果

(1) 超楕円曲線 C とは, 複素射影直線 CP^1 の $2g + 2$ 点分岐 2 重分岐被覆であり, 種数 g の Riemann 面である. 分岐点の取り方によって C の複素構造が変化する. 代数方程式 $w^2 = z^{2g+1} - 1$ から得られる超楕円曲線の周期行列の新たな表示を得た. 過去に得られていた周期の計算を用いて, ヴァンデルモンド行列の逆行列表示を利

用した。その周期行列は、これまで漸化式表示しか知られていなかったものであり、数少ない一般種数の周期行列の明示的表示が得られた。双正則自己同型写像を利用することにより、周期行列の各成分について円分体を用いて記述することができた。

- (2) Riemann 面 Y の周期行列を導出する数式処理プログラムの作成に成功し、計算実験を行った。これについては、まだ修正が必要である。(1),(2)については、今後の応用が期待される。
- (3) (1)と同じ、代数方程式 $w^2 = z^{2g+1} - 1$ から得られる超楕円曲線の点付き調和体積を、双正則自己同型写像を利用して得るための組み合わせの手法について整理した。この手法と離散 Riemann 面を結びつけ、調和体積の変分を導出することを画策したが、思ったような成果を出すことができなかった。
- (4) 国内外の研究集会に参加し研究者と議論を交わした。その際の旅費を科研費から支出した。その中のいくつかで講演も行い、貴重な助言を得た。本研究を推進・成果発表するために、Riemann 面、トポロジー、複素解析、モジュライ空間に関連する書籍およびノート PC を適宜購入した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

Yuuki Tadokoro: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, Tsukuba J. Math. **38** (2015), no.2, 137-158, 査読有

Yuuki Tadokoro: Nontrivial algebraic cycles in the Jacobian varieties of some quotients of Fermat curves, Internat. J. Math. **27** (2016), no.3, 10 ページ, 査読有

Yuuki Tadokoro: Harmonic volume and its applications, Handbook of Teichmüller Theory, Vol. VI (A. Papadopoulos, ed.), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics Vol. **27**, European mathematical Society (2016), 167-193, 査読有

[学会発表](計 7件)

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2015 年 11 月 12 日, 談話会, 島根大学総合理工学部。

「Mini-Workshop on Topology of Singularities, II」, 東北大学理学部。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2015 年 11 月 12 日, 談話会, 島根大学総合理工学部。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2015 年 3 月 16 日, 研究集会「Moduli Space, Conformal Field Theory and Matrix Models」, 沖縄科学技術大学院大学。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2015 年 2 月 14 日, 研究集会「Riemann 面・不連続群論」, 大阪大学中之島センター。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2014 年 9 月 25 日, 日本数学会秋季総合分科会函数論分科会一般講演, 広島大学。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2013 年 8 月 29 日, 研究集会「Riemann 面に関する位相幾何学」, 東京大学大学院数理科学研究科。

田所勇樹: The period matrix of the hyperelliptic curve $w^2 = z^{2g+1} - 1$, 2013 年 8 月 22 日, 研究集会「代数多様体のトポロジーとその周辺」, 北海道大学理学部。

[図書](計 0件)

[産業財産権]
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田所 勇樹 (TADOKORO YUUKI)
木更津工業高等専門学校・基礎学系・准教授
研究者番号：10435414

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：