

平成 29 年 6 月 25 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800057

研究課題名(和文) Analysis of macroscopic observables in asymptotically abelian systems

研究課題名(英文) Analysis of macroscopic observables in asymptotically abelian systems

研究代表者

緒方 芳子(Ogata, Yoshiko)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：80507955

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：量子スピン系の巨視的物理量についての研究を行った。量子系は、非可換代数で与えられるため、一般に物理量は非可換であり、巨視的物理量についてもそうなのであるが、巨視的物理量については真に可換な物理量で近似することが可能である。この定理の証明のカギとなるのは、平均エントロピーの性質の一つである量子シャノンマクミランの定理である。この定理自体はすでに知られていたが、本研究ではこれに新しい簡潔な証明を与えた。同時に、量子スピン系におけるこの定理を一般のAF C^* 系に拡張した。さらに、(巨視的物理量の一つである)ハミルトニアン基底状態の分類について研究を行った。

研究成果の概要(英文)：We considered the macroscopic observables in quantum spin systems. As quantum systems are given by non-commutative algebras, the physical observables do not commute with each others. However, macroscopic observables can be approximated by commuting observables. One of the key ingredient of the proof of this theorem is the quantum Shannon McMillan theorem. We gave a simple new proof of this theorem. Furthermore, we extended this theorem to general AF C^*

研究分野：量子統計力学

キーワード：量子スピン系 巨視的物理量

1. 研究開始当初の背景

量子統計力学において、量子スピン系は重要な物理モデルの一つである。量子統計力学が単なる量子力学と異なる点は、大きな系を考えることにある。そこで、量子スピン系において我々が考える対象は、巨視的物理量と呼ばれるものである。系のサイズを無限大にした状況、あるいは無限大にしていっていった状況において、この巨視的物理量たちがどのように振る舞うかに対して一般に興味がある。特にエネルギーを表すハミルトニアンは、時間発展を与えるため、その性質の解析は非常に重要である。ハミルトニアンを与える時間発展は、有限温度の熱平衡状態を KMS 条件という条件を通して規定する。(有限量子系においてはこれはギブス分布と呼ばれるものに相当する。) また、系が絶対零度にある状態である基底状態も、時間発展によって定まる。有限系では、これはハミルトニアンの最小固有値に対応する固有ベクトルで張られる空間に台をもつ状態ということになる。量子力学において時間発展を与える演算子はハミルトニアンと呼ばれるが、量子スピン系においては、これは自己共役な行列の列により表される。この行列の最低固有値と、のこりのスペクトルの間に(系のサイズについて)一様なギャップが開いているか否かは基底状態の性質をきめる重要な問題である。近年このギャップをもった系の分類が注目をあつめている。一般にスペクトルギャップを示すのは非常に難しい問題であり、完全に一般的な量子スピン系についてこの問題を考えることは現在の技術では不可能である。しかし一次元系については finitely correlated state と呼ばれる状態を基底状態としてもつサブクラスは、ある良い条件のもとスペクトルギャップを持つということが知られている。

2. 研究の目的

本研究では、巨視的物理量の漸近的な振る舞いを調べることを目標とした。巨視的物理量は物理学において基本的な対象であり、その数学的解析は、統計力学の基礎付けともかわる重要な問題である。

3. 研究の方法

解析には、作用素環論、関数解析および数理論理学で知られていたスペクトル解析の手法を用いた。

4. 研究成果

量子シャノンマクミランの定理の一般化
量子系は、非可換代数で与えられるため、一般に物理量は非可換であり、巨視的物理量についてもそうなのであるが、巨視的物理量については真に可換な物理量で近似することが可能である。この定理の証明のカギとなるのは、平均エントロピーの性質の一つである量子シャノンマクミランの定理である。この定理は、量子系における平均エントロピーが

一体なにを表しているのかという基本的な問題への一つの解答をあたえている。この定理自体はすでに知られていたが、本研究ではこれに新しい簡潔な証明を与えた。これまでの証明と根本的に異なる点は、この新しい証明が、古典系の議論を経ないという点である。量子系の熱力学的な性質を表す変分原理とエルゴード理論の組み合わせによるものである。この手法自体、この後量子情報理論の分野で有効利用できるものではないかと期待している。本研究では、量子シャノンマクミランの定理をこれまで示されていた量子スピン系の設定を一般化した AFC^{*}系と呼ばれる系において示した。この点は、定理自体新しいものである。

一次元量子スピン系におけるスペクトルギャップを持つハミルトニアンの分類

量子力学において時間発展を与える演算子はハミルトニアンと呼ばれるが、量子スピン系においては、これは自己共役な行列の列により表される。この行列の最低固有値と、のこりのスペクトルの間に(系のサイズについて)一様なギャップが開いているか否かは基底状態の性質をきめる重要な問題である。ギャップのある系は正常相とみることが出来、臨界的な振る舞いをしない。近年このギャップをもった系の分類が注目をあつめている。分類とは以下のような意味での分類を考える。：二つのスペクトルギャップをもつハミルトニアンは、それらがスペクトルギャップをもつハミルトニアンの連続な路でつながることが出来るときに同値なものとみなす。先に述べたように、スペクトルギャップの存在は正常相であることを意味しているから、スペクトルギャップのあるハミルトニアンの連続的な路でつながることが出来るということは、正常相の中で連続的につながる、途中臨界的な振る舞いを経験せずにつながることが出来るということの意味している。この意味で、この分類は正常相の分類として妥当なものと言え、世の中のすべての、スペクトルギャップをもつハミルトニアンの分類を行うことは、基本的かつ重要な問題である。しかしながら、一般に量子スピン系においてスペクトルギャップの存在を示すのは非常に難しい問題であり、完全に一般的な量子スピン系についてこの問題を考えることは現在の技術では不可能である。まして、分類をしようと思ったら路の途中でギャップが消えないことを何らかの方法で保証しなくてはいけないため、大変難しい問題といえる。しかし一次元系については finitely correlated state という状態を基底状態を持つハミルトニアンについては、ある良い条件のもとギャップを持つことが知られている。そこで、本研究ではまず初めに Bachmann 氏と、この、すでにギャップがあることを知られていた系についての分類を行った。この問題は

最終的に primitive と呼ばれる性質を持った完全正写像の分類問題となり,これを解いた.

この,すでに知られていたスペクトルギャップをもつハミルトニアンクラスは,左右無限鎖を考えたときに,その上での基底状態(端状態とよぶ)の縮重度が同じであるという性質を持っている.一方で,左右の端状態の縮重度が同じでないようなハミルトニアンの例が Bachmann-Nachtergaele によって知られていた.また,左右の端状態の縮重度の組が異なるような二つのハミルトニアンがバルクにおいて等価であるか否かという問題が残っていた.先に単に分類と言ったが,分類には2種類ある.つまり,無限系(=バルク)で行うか,有限の箱の中で行うか(その場合スペクトルギャップは系のサイズに対して一様でなくてはいけない)という二種類である.前者では,すべての系が等価であると予想され,後者では端状態の縮重度が完全不変量であると予想されている.

このように,これまでの枠組みだけでは解決できない問題があった.これらの問題を解決するために,本研究では新しい,ハミルトニアンのクラスを導入した.このクラスを Class A と呼んだ.これはこれまで知られていたものの拡張となっている.本研究ではまず,これらがスペクトルギャップをもつなど,良い性質を満たすことを示した.次に,これら良い性質のうち物理的な5つの定性的な条件を取り出した.その性質とは,ギャップの存在や,端の効果の指数関数的な減衰など,正常相としては自然なものである.そして,逆に,これら5つの性質をもつハミルトニアンは,分類において,Class A で与えられるタイプのあるハミルトニアンと等価であることを示した.つまり,Class A は単に新しいモデルというだけでなく,普遍的な存在であるということである.この Class A とその普遍性をもとに,本研究では frustration free と呼ばれる性質を満たすハミルトニアンのバルクでの分類を行った.結果は,すべて等価ということである.同時に本研究では上の Class A の“縮退のない”ケースについて,有限系における分類を行い,「端状態の数が完全不変量」という結果を得た.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1.Y. Ogata The Shannon-McMillan theorem for AF C^* -systems, Letters in Mathematical Physics 103 (2013) 1367--1376

2.Y. Kawahigashi, Y. Ogata, E. Stormer,

Normal states of type III factors
Pacific Journal of Mathematics 267 (2014) 131—139

3.S.Bachmann,Y.Ogata, C^1 -Classification of gapped parent Hamiltonians of quantum spin chains, Communications in Mathematical Physics 338 (2015) 1011--1042

4.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization I, Comm. Math. Phys. 348 (2016), 847--895.

5.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization II, Comm. Math. Phys. 348 (2016), 897--957.

6.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization III, Comm. Math. Phys. 352 (2017), 1205--1263.

[学会発表](計 6 件)

1.Y. Ogata, A classification of finitely correlated states, Disordered quantum many-body systems, Banff International Research Station, 2013年10月

2.Y. Ogata, C^1 -classification of gapped Hamiltonians, Subfactors and Conformal Field Theory, Oberwolfach, 2015年3月

3.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its C^1 -classification, International Congress on Mathematical Physics, Santiago, 2015年7月

4.Y.Ogata, Classification of gapped Hamiltonians in quantum spin chains, MSJ-SI Operator Algebras and Mathematical Physics, 2016年8月

5.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization, Many-Body Quantum Systems and Effective Theories, Oberwolfach, 2016年9月

6.Y. Ogata, A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization, QMath13, 2016年10月

6. 研究組織

(1)研究代表者
緒方 芳子 (Yoshiko Ogata)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号： 80507955