

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：11101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800070

研究課題名(和文) 流体力学における偏微分方程式の解の形状に関する長時間挙動の解析

研究課題名(英文) Analysis on the asymptotic phase behavior of the solution to partial differential equations in fluid mechanics

研究代表者

岡部 考宏 (Okabe, Takahiro)

弘前大学・教育学部・講師

研究者番号：00626872

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：半空間上の非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の時間大域的挙動について、解のエネルギー減衰の下からの評価とスペクトル分布を明らかにした。特に初期速度場を水平成分と鉛直成分に分割して考察し、水平成分の低周波分布が解のエネルギー減衰の下からの評価に影響を与えることが明らかになった。全空間上のナビエ・ストークス方程式の解を重み付きハーディー空間で考察し、高次漸近展開を初期値の積分量による条件で導出した。
有界領域上で境界からの流入・流出がある状況下での大きな定常解が安定になりうるための条件を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：On the asymptotic behavior of the solution of the Navier-Stokes equations in the half space, we obtain the lower bound of the energy decay of the solution and its spectral concentration. Separating on tangential and vertical components of the initial data, we see that the lower frequency part of the tangential components much affects the lower bound of the energy decay. We construct a strong solution in the weighted Hardy space and obtained the higher order asymptotic expansion under the moment condition on initial data.
Under the general flux condition on the boundary, we clarified the condition for the stability of large stationary solutions in a bounded domain.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：ナビエ・ストークス方程式 エネルギー減衰 漸近展開 時間周期解 重み付きハーディー空間 安定性

1. 研究開始当初の背景

非圧縮粘性流体の運動エネルギーは、外力によるエネルギー注入がなければ、粘性、即ち摩擦によって減少することが予想される。このことは、増田久弥氏により、エネルギー（解の自乗可積分ノルム）の時間減衰という形で解決がなされた後、Schonbek 氏や宮川鉄朗氏らによる一連の研究により、エネルギーの時間多項式減衰が示され、精密な減衰指数が明らかにされている。しかし、これらの研究では、エネルギーの時間減衰とその減衰評価が主な研究対象であり、「時間とともに穏やかになるのか、或いは乱雑になるか」等の定性的な性質に関してはあまり知られていない。

領域の境界上で、流体の流入流出を考えることは、自然な状況ではあるが、有界領域上の定常ナビエ・ストークス方程式の境界値問題に対する可解性は完全には解決されていない。しかし、Leray (J. Math. Pures Appl. 1933)に始まる一連の結果では、境界データの大きさに関する制限を課すことなく、境界データの定性的な性質により可解性が示されている。最近、Kozono-Yanagisawa (Math. Z. 2009)により、領域の形状に関する位相不変量に着目したベクトル場の解析により、扱える境界データのクラスが一般化されている。従って、大きな境界データに対して、大きな定常解が存在し得るが、この大きな定常解が安定かどうかは知られていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非圧縮粘性流体の運動エネルギーの散逸のメカニズムの解明を動機とし、非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解の周波数成分の時間大域挙動に着目し、解のエネルギーがある周波数帯（スペクトル分布）に集中・凝縮する現象が起こるかどうか解明するとともに、この現象を生じさせるような初期条件の定性的な条件を明らかにすることである。特に、周波数成分の分布を調べることは、方程式に内在する非線形現象の解明と深く関連している。この取り組みから、線形のストークス方程式と本質的に異なる非線形現象の発見を目指している。

また、3次元の滑らかな境界を持つ有界領域において、境界からの流入・流出がある状況下での定常ナビエ・ストークス方程式の解について、解の大きさに関わらず安定となるような定性的な性質を解明することを目指す。

3. 研究の方法

n 次元全空間上で、外力が0のナビエ・ストークス方程式について考察を行う。この場合においてはSkalakにより、解のエネルギー時間減衰と、解の周波数成分の時間挙動との相関が明らかにされており、エネルギーが時間多項式減衰する場合には、エネルギーの低周波領域への集中が起こり、指数関数的に減衰する場合には、中域の周波数帯への凝縮

が起こる。従って、解が時間多項式減衰するのか、指数関数的に減衰するのかを判定することが重要であり、これを解のエネルギーの下からの減衰評価(lower bound)を確立することで行う。また下からの減衰評価と初期値の構造との関係を解析する。

解のエネルギー減衰に対しては、ナビエ・ストークス流に占める線形部分（ストークス流）と非線形項のパワーバランスが重要である。これについては、Fujigaki-Miyakawa (SIAM J. Math. Anal. 2001)での、基本解（熱核、ガウス関数）による高次漸近展開を用いた議論が有効である。そこで、一次、二次と、より高次の漸近展開を行うことで、速い減衰に対する下からの評価を確立する。これらを実解析的手法、調和解析的手法及び関数解析的手法により考察する。

3次元の滑らかな境界を持つ有界領域上で境界からの流入・流出がある状況下での定常解の安定性をエネルギー法により導く。定常解からの摂動方程式に現れる対流項を散逸項に吸収できるかが鍵となるが、これをLerayの不等式をみたすような内部拡張を許す境界データに対して考察する。さらに対応する定常解もLerayの不等式を保存するような境界データの定性的な条件を求めることができれば安定性を導くことができる。

4. 研究成果

(1) 半空間におけるナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰における下からの評価とスペクトル分布について

先行する研究として、全空間における非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー集中現象について、解の低周波部分の情報が支配的になっていく様子が明らかにされている。より詳しくは、3次元全空間上のナビエ・ストークス方程式の乱流解の範疇において、初期値が十分な低周波成分を持ち、かつ空間遠方での可積分性を持てば、解のエネルギーは任意の低周波領域に集中していくことが得られている。

全空間の場合と同様の観点から、半空間におけるナビエ・ストークス方程式に対しても考察を行った。半空間では、境界条件と非圧縮条件の影響により、「流れ」は全空間のそれと比べ、格段と複雑なものとなる。このことは、ストークス流に関する鵜飼の解公式が、空間大域的な特異積分作用素を駆使して表現される点にも見出せる。本研究では、鉛直方向と接方向とに「流れ」影響を分解することで、線形ストークス流のエネルギー減衰の下からの評価を導出し、ナビエ・ストークス方程式の解のエネルギー減衰に対する下からの評価を確立することに成功した。応用として、全空間における低周波数領域に対応したスペクトル帯へのエネルギーの集中現象を解明した。(雑誌論文)

雑誌論文で扱った初期値は、鉛直成分が0であるものであった。この場合には、線形

のストークス流も鉛直成分が 0 となり、一次元低い全空間のストークス流の様に振る舞うことが示されている。しかしながら、鉛直成分が 0 以外の値をとる場合には、上述の構造は破綻してしまう。本論文では、鉛直成分が接方向の摂動と見なせ、かつ非圧縮条件と両立するような初期値の特徴付けを行い、ナビエ・ストークス流のエネルギー減衰に対する下からの評価を確立し、雑誌論文の結果の改良に成功した。(雑誌論文)

(2) ナビエ・ストークス方程式の大きな定常解の安定性について

定常解の自乗可積分ノルムでの安定性に関しては、小さな定常解の安定性が Serrin (Arch. Rational Mech. Anal. 1959) により示され、また、Sattinger により、定常解による摂動ストークス作用素の固有値分布による安定性の判定法が確立されている。しかしながら、与えられた大きな定常解に対する、摂動ストークス作用素の固有値分布を調べることは、実際には非常に困難である。そこで、雑誌論文による研究では、与えられた大きな定常解から、境界データの影響を分離する手法を開発し、Sattinger とは異なる安定性の判定法を与えた。これは定常解が、Leray の不等式をみたすような境界データの領域内部拡張に 3 乗可積分ノルムの意味で十分近ければ指数関数的漸近安定であるというものである。故に境界データの内部拡張と定常解の差が本質的であるため、両者が十分大きい場合にも有効な手法である。また、内部拡張の十分近くに定常解の存在を許容するような境界データの条件を、内部拡張の過度により特徴付けることに成功した。

条件の一般化として、定常解が安定となるような境界データの幾何学的な形状といった定性的な性質のさらなる解析が課題である。

(3) 重み付きハーディー空間におけるナビエ・ストークス方程式の可解性と漸近展開への応用について

全空間の非圧縮ナビエ・ストークス方程式の解に対してその漸近挙動を解析するためには、解の主要項を明らかにすることが重要である。この方面では、Fujigaki-Miyakawa (SIAM J. Math. Anal. 2001) による一連の研究が知られている。解の漸近展開を行うためには、解の高次の重み付き評価が必要不可欠である。しかしながら、重み付きルベグ空間の枠組みでは、マッケンハウプト条件による重みの制限により、高次の漸近展開を行うには不十分であった。そのため、初期値と解について空間遠方で多項式減衰するという制限が要求されていた。

一方、重み付きハーディー空間を用いたナビエ・ストークス方程式の可解性が筒井容平氏により明らかにされた。これにより重み付きルベグ空間におけるマッケンハウプト

条件を超えた高次の重みを扱え、解の高次漸近展開への応用が可能になった。

そこで、まず重み付きハーディー空間を用いたモーメント条件の修正を行い、初期値に空間遠方の減衰を課すことなく、積分量の条件のみによって、 n 次の漸近展開を導出し、解の主要項を明らかにした。さらに重み付きハーディー空間のモーメント消失の性質から線形ストークス流の低次の主要項の影響がなくなり、本質的に非線形項の影響が支配的であることが明らかになった。また、漸近系が求まれば、その係数を制御することで、解の時間減衰が得れることに気づいた。特に、Brandolese 氏により導入された回転対称性を用いることで、一般の初期値に対する最良の減衰よりも速い時間減衰をより広いクラスの初期値に対して導くことに成功した。(雑誌論文)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Takahiro Okabe and Yohei Tsutsui, Navier-Stokes flow in the weighted Hardy space with applications to time decay problem, J. Differential Equations, 261 (2016), 1712-1755, 査読有
DOI 10.1016/j.jde.2016.04.014

Takahiro Okabe, Space-time asymptotics of the 2D Navier-Stokes flow in the whole plane, 数理解析研究所 講究録, 「流体と気体の数学解析」, 1947(2015), 32-44, 査読無

Takahiro Okabe, Initial profile for the slow decay of the Navier-Stokes flow in the half-space, J. Evolution Equations, 15 (2015), 149-163, 査読有

Naoya Kanbayashi, Hideo Kozono, Takahiro Okabe, Remark on the stability of the large stationary solutions to the Navier-Stokes equations under the general flux condition, J. Math. Anal. Appl., 409 (2014), 378-392, 査読有
DOI 10.1016/j.jmaa.2013.07.016

Takahiro Okabe, Lower bound of L^2 decay of the Navier-Stokes flow in the half-space \mathbb{R}_+^n and its asymptotic behavior in the frequency space, J. Math. Anal. Appl., 401 (2013), 534-547, 査読有
DOI 10.1016/j.jmaa.2012.12.033

[学会発表](計 14 件)

岡部考宏, 筒井容平, Time periodic strong solutions to the incompressible Navier-Stokes equations with external forces of non-divergence form, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 24 - 27 日, 首都大学東京 (八王子市)

岡部考宏, Strong solvability of the Stokes and Navier-Stokes equations in weak L^{∞}

space, RIMS 研究集会「関数空間の構造とその周辺」, 2017年2月6-9日, 京都大学数理解析研究所(京都市)

Takahiro Okabe, Periodic strong solution of Navier-Stokes equations, Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, ダルムシュタット工科大学, ドイツ, 2016年11月30日-12月2日, ダルムシュタット工科大学, ダルムシュタット(ドイツ)

Takahiro Okabe, Navier-Stokes flow in the weighted Hardy spaces, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, 2016年7月1-5日, オーランド(アメリカ)

岡部考宏, Time periodic strong solution to the Navier-Stokes equations with large data, 日本数学会 2016年度年会, 2016年3月16-19日, 筑波大学(つくば市)

Takahiro Okabe, Time periodic strong solution to the Navier-Stokes equations with large data, The 16th International Conference, Graduate School of Mathematics, Nagoya University The Navier-Stokes Equations and Related Topics—In Honor of the 60th Birthday of Professor Reinhard Farwig—, 2016年3月7-11日, 名古屋大学(名古屋市)

岡部考宏, 筒井容平, Navier-Stokes flow in the weighted Hardy space with applications to time decay problem, 日本数学会 2015秋季総合分科会, 2015年9月13-16日, 京都産業大学(京都市)

Takahiro Okabe, Space-time asymptotics of the two dimensional Navier-Stokes flow in the whole plane, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems, New Trends-A week for Wojciech Zajaczkowski, 2015年8月30日-9月5日, パナッハ数学研究所, ポズナニ(ポーランド)

Takahiro Okabe, Navier-Stokes flow in the weighted Hardy space, Asymptotic problems, Elliptic and Parabolic Issues, 2015年6月1-5日, Vinius(リトアニア)

岡部考宏, Remark on the asymptotic expansion of the Navier-Stokes flow in the whole space, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会, 2015年1月6-7日, 名古屋大学(名古屋市)

岡部考宏, Remark on the asymptotic expansion of the Navier-Stokes flow in the whole space, 非線形勉強会, 2014年11月15日, 早稲田大学(新宿区)

岡部考宏, 二次元ナビエ・ストークス流の時間大域的漸近挙動について, 第3回岐阜数理科学研究会, 2014年9月7-9日, 飛騨高山町の博物館(高山市)

岡部考宏, Space-time asymptotics of the 2D Navier-Stokes flow in the whole plane,

RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2014年7月2-4日, 京都大学数理解析研究所(京都市)

岡部考宏, Space-time asymptotics of the two dimensional Navier-Stokes flow in the whole plane, 日本数学会 2014年度年会, 2014年3月15-18日, 学習院大学(豊島区)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡部 考宏 (OKABE, Takahiro)

弘前大学・教育学部・講師

研究者番号: 00626872