様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 １５ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００７４

研究課題名（和文）非線型分散型方程式に於ける散乱作用素の解析

研究課題名（英文）Analysis of the scattering operator for nonlinear dispersive equations

研究代表者
佐々木　浩宣（Hironobu, Sasaki）

千葉大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：００５６８４９６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、非線型分散型方程式に於ける散乱作用素の諸問題と、解の平滑化効果について考察した。関数解析的手法を用いることで、次の研究成果を得た：（１）空間１次元非線型ディラック方程式の非線型項がｐ乗冪である場合、ｐが３より大きければ散乱作用素が適当なヒルベルト空間の原点近傍上で定義できることを証明した。（２）空間３次元非線型ディラック方程式の非線型項が３乗冪である場合、重み付きソボレフ空間の或る原点近傍の散乱作用素による像は同じ重み付きソボレフ空間の部分集合となることを証明した。（３）ハートリー項を伴ったシュレディンガー方程式に於ける解析的平滑化効果に関する諸性質を証明した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider some problems on scattering operators and analytic smoothing effects for nonlinear dispersive equations. Using the Method of functional analysis, we obtain the following results:
(1) We considered the one space dimensional Dirac equation with a p-th power nonlinearity, and we proved that if p is greater than 3 then the scattering operator can be defined on a neighborhood of 0 in a suitable Hilbert space. (2) We considered the three space dimensional Dirac equation with a cubic power nonlinearity, and we proved that a neighborhood of 0 in the weighted Sobolev space is included in the same weighted Sobolev space. (3) We considered the Hartee equation, and we proved some properties of the analytic smoothing effect.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線型分散型方程式　波動作用素　散乱作用素　解析的平滑化効果　解の漸近挙動　ソボレフ空間　ローレンツ空間　ベゾフ空間

１．研究開始当初の背景

＜対象となる偏微分方程式＞

非線型分散型方程式（例：非線型シュレディンガー方程式、ハートリー方程式、非線型クラインゴルドン方程式、非線型ディラック方程式、KdV 方程式）は、古典場や非線型波動を記述する重要な方程式であり、これまでに多くの研究がなされている。

＜解の存在について＞

一部の例外を除き、非線型分散型方程式は解析的に解を求めることは不可能である。そこで、関数解析学的手法（縮小写像の原理、調和解析学等）を用いて、解の存在定理を数学的に証明することが重要となる。更に、時間大域解の漸近挙動や形状（滑らかさ、減衰の速さ）を調べることは、純粋数学のみならず、物理学・工学的にも本質的な課題である。

＜散乱問題＞

時間大域解が時刻無限大で自由解（摂動項が無い方程式の解）へ漸近するとき、非線型項は「短距離型」であるという。更にこのとき、波動作用素・散乱作用素の存在が予想される。非線型項が短距離型であることや散乱作用素の存在は、非線型効果が限定的であることを指し、種々の現象を理解するうえで大変有用な鍵となる。

非線型分散型方程式に於ける散乱作用素の存在定理については、古くから多くの研究がなされているが、近年でも重大な結果が多く報告されている。一方で、いまだに解決されていない重要な問題も山積している。

非線型クラインゴルドン方程式や非線型ディラック方程式は、非線型シュレディンガー方程式に比べ証明に使えそうな道具が不足しているため未解決部分が多く、今後の解明が強く期待されている。

ここで散乱作用素たちの定義を詳細に述べたい。B(H)をヒルベルト空間 H の 0 近傍とし、もし以下の事柄が成立するとき波動作用素 W:f→g が B(H)上で定義される：B(H)に属する入力データ f(x)を与えると、「f を初期データとする自由解」へ、時刻が負の無限大の時に H の位相で漸近する非線型解（初期データは g）が存在する。

また、もし以下の事柄が成立するとき逆波動作用素 V:f→g が B(H)上で定義される：B(H)に属する初期データ f(x)を与えると、或る自由解（初期データは g）へ、時刻が正の無限大の時に H の位相で漸近する非線型解（初期データは f）が存在する。(g を出力データと呼ぶ。)

合成写像 V◦W が定義できるとき、それを散乱作用素 S と呼ぶ。

＜解析的平滑化効果＞

散乱問題は、解の漸近挙動を問う分野であるが、解の形状を問う分野も盛んに議論されている。

自由シュレディンガー方程式の場合、「指数関数的減衰を伴う初期データに対する時間大域解は初期時刻以外で解析的に滑らかになる」という性質（解析的平滑化効果）は直ちに判明することだが、特定の非線型シュレディンガー方程式についても解析的平滑化効果が成り立つことが証明されており、古くから多くの研究がなされている。

２．研究の目的

(1) 空間１次元の非線型ディラック方程式の散乱問題を考察する。非線型が p 乗冪型であるとき、p が３より大きければ短距離型であることを証明する。

(2) 空間３次元の非線型ディラック方程式の散乱問題を考察する。散乱作用素 S が重み付きソボレフ空間 H の或る原点近傍 B(H)で定義されることは既に判明している。本研究では、H の様々な部分集合の S による像が、再び同じ部分集合に含まれるか否かを判明させる。

(3) ハートリー項を伴ったシュレディンガー方程式を考察する。既存の手法から、解析的平滑化効果が成立することは容易に判明する。但し、既存の手法では、初期データが「重み付きノルム」の意味での小ささを仮定していた。本研究では、「通常のノルム」の意味での小ささのみを仮定して、解析的平滑化効果の諸性質について解明していく。

３．研究の方法

(1) 調和解析学、双曲面上の幾何学、関数空間（ルベーグ空間、ソボレフ空間、ベゾフ空間、ローレンツ空間）の諸理論を用いて研究を行う。

(2) 非線型シュレディンガー方程式の散乱問題に於いては、ガリレイ変換の生成作用素 J が有効である。この J を適当に修正することで、非線型クラインゴルドン方程式等の散乱問題へ応用できることが近年判明している。本研究では、修正された J を詳細に解析し、種々の方程式へ応用していく。

(3) 得られた手法をさらに改良することで、様々な非線型分散型方程式の重要な未解決問題への応用を図る。

(4) 得られた研究成果は、研究集会・学会での発表、国際学術雑誌への投稿・掲載を通して周知させる。

４．研究成果

(1) 空間１次元の非線型ディラック方程式の散乱問題を考察する。非線型がｐ乗冪型であるとする。

まず論文⑤の結果を説明する。ここでは重み付きソボレフ空間 H(s,m)を与え考察する。但し、s は微分階数、m は重みのオーダーである。
（主結果）pが５以上であるとき、s が 3/4 より大きければ、散乱作用素 S が H(s,0)の或る原点近傍で定義できる。pが 19/6 より大きく５未満であるとき、s が適当な正数より大きければ、S が H(s,1)の或る原点近傍で定義できる。pが３より大きく 19/6 以下であるとき、波動作用素 W が H(2,2)の或る原点近傍で定義できる。
（用いた手法）シュレディンガー方程式の理論において有効なガリレイ変換の生成作用素Ｊとそれと深い関係のある線型作用素Ｐを、ディラック方程式に適用できるよう修正した。修正した作用素たちを含んだノルム不等式を応用した。

次に論文③（大阪大学の林仲夫氏との共同研究）の結果を説明する。論文⑤ではpが３より大きく 19/6 以下である場合の S の存在性は示されていなかった。本論文では、重み付きソボレフ空間 H(1,1)と通常のソボレフ空間 H(s,0)との共通部分 X(s)を与え考察する。
（主結果）pが３より大きく、５未満であるとき、s が 4/(p-1)より大きければ散乱作用素 S が X(s)の或る原点近傍で定義できる。
（用いた手法）論文⑤で導入した線型作用素に関する不等式を改良した。

以上２編の論文により、「pが３より大きいとき、散乱作用素 S が適当なヒルベルト空間の原点近傍で定義できる」ことが示された。pが３以下のときは、短距離型でなくなると見込まれているので、上記の結果は最良のものとなると予想される。

(2) 空間３次元の非線型ディラック方程式の散乱問題を考察する。非線型項は３次オーダーとする。「散乱作用素 S はソボレフ空間 H(k)（ただし、k は１より大きいものとする）の或る原点近傍で定義される」ことは既に知られている。ここでは重み付きソボレフ空間 H(s,m)を与え考察する。
（論文⑥の主結果）m を自然数、s を k と m を下回らない実数とする。このとき、H(s,m)の或る原点近傍の散乱作用素 S による像は、再び H(s,m)の部分集合となる。この結果を概して言えば「小さい入力データ（x の関数）が速く減衰しているとき、出力データも同じ程度かそれより速く減衰している」となる。
（用いた手法）論文⑤において使用した「修正した作用素たち」の解析を進め、新たなる不等式を考案した。

(3) ハートリー項を伴ったシュレディンガー方程式を考察する。ハートリー項は、相互作用ポテンシャル v(x)を含んだ非局所的非線型項である。既存の手法では「指数関数を重みとするノルム」の意味で小さい初期データに対する解を考察していたが、今回は時間大域解存在定理を保証する「通常のノルム」（詳しく言えば L2 ノルム）の意味での小ささのみを仮定して解析的平滑化効果を考察した。
（論文④の主結果）解析的平滑化効果に関する収束半径の評価式を証明した。初期データの減衰レートと、解の収束半径が一致する具体例を与えた。相互作用ポテンシャル v(x)に強い条件を与えた場合、解の収束半径は無限大になることを証明した。
（用いた手法）初期データ f(x)に依存して決まる関数空間を考案した。この空間は今回の話に留まらず、様々な研究に応用することができると予想される。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① H. Sasaki, Remark on the scattering operator for the quintic nonlinear Dirac equation in one space dimension, to appear in Advanced Study of Pure Mathematics.

② H. Sasaki, Remark on the analytic smoothing effect for the Hartree equation, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.

③ N. Hayashi and H. Sasaki, Scattering operator for the one dimensional Dirac equation with power nonlinearity, J. Hyper. Differential Equations, 査読有, 13, 2016, 821-832. http://dx.doi.org/10.1142/S0219891616500223

④ H. Sasaki, Small analytic solutions to the Hartree equation, J. Funct. Anal., 査読有, 270, 2016, 1064-1090. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.11.001

⑤ H. Sasaki, Small data scattering for the one-dimensional nonlinear Dirac

equation with power nonlinearity,
Comm. Partial Differential Equations, 査読有, 40, 2015), 1959-2004.
http://dx.doi.org/10.1080/03605302.2015.1081608

⑥ H. Sasaki, Remark on the scattering operator for the cubic nonlinear Dirac equation in three space dimensions,
J. Differential Equations, 査読有, 259, 2015, 3274-3297.
https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.020

〔学会発表〕（計２件）

①佐々木 浩宣, Small analytic solutions to the Hartree equation,
日本数学会 2016 年度年会函数方程式論分科会, 筑波大学（茨城県・つくば市）, 2016 年 3 月 19 日

②佐々木 浩宣, Remark on the scattering operator for the cubic nonlinear Dirac equation in three space dimensions,
日本数学会 2014 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 広島大学（広島県・東広島市）, 2014 年 9 月 28 日

〔その他〕
ホームページ等（研究成果記載）
http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~sasaki/J-re.html

６．研究組織
(1)研究代表者
佐々木　浩宣（SASAKI HIRONOBU）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00568496

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし

(4)研究協力者　なし