

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2017

課題番号：25800083

研究課題名(和文)シュレディンガー方程式の解の定性的・定量的解析

研究課題名(英文)Qualitative and quantitative analysis of solution to Schrodinger equations

研究代表者

水谷 治哉 (Mizutani, Haruya)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10614985

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：量子力学的粒子の時間発展を記述するシュレディンガー方程式に対して解析を行った。特に、電磁場ポテンシャルの性質(特異性、無限遠での挙動など)や古典力学系の幾何学的構造(ハミルトン流の漸近挙動、捕捉・非捕捉性など)が与える影響について、初期値問題の解の時空間大域的なノルム不等式を通して、その定性的かつ定量的な解析を行った。なかでも、漸近的平坦リーマン計量および非有界な電磁場ポテンシャルを同時に扱う統一的手法を開発し、その結果として微分のロスを含まないストリッカーツ評価の証明に成功した。

研究成果の概要(英文)：A mathematical analysis of Schrodinger equation, describing the motion of particles in quantum mechanics, has been developed. We have studied effects of the behavior of external electromagnetic potentials and Hamilton flows to the behavior of the solution of Schrodinger equation, through several space-time norm inequalities. In particular, we have constructed a unified approach to deal with both the asymptotically flat metric and unbounded electromagnetic potentials. As a consequence, Strichartz estimates without loss of derivatives have been shown for such a mixed case.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：シュレディンガー方程式 ストリッカーツ評価 散乱理論 偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

線形シュレディンガー方程式の初期値問題に対する、実解析的な時空間ノルム評価式を用いた解の定量的性質の解析は、線形のみならず非線形問題の解析においても重要であることが知られている。特に、Strichartz (1977) によって発見され、Ginibre-Velo (1985) や谷島 (1987)、Keel-Tao (1998) によって一般化された、自由シュレディンガー方程式に対するストリッカーズ評価は非線形シュレディンガー方程式 (NLS) の解析における最も重要な道具の一つである。具体的な応用例としては、べき乗型とは限らない一般的な非線形項を持つ場合や滑らかではない初期値を考えた場合の NLS の初期値問題の適切性、あるいは解の時間大域的漸近挙動を記述する散乱理論などが挙げられる。

一方で、より一般的な状況においては自由シュレディンガー方程式に対するストリッカーズ評価では不十分なことがある。例えば、

- ① 電磁場による外力を考慮した場合や配位空間が非一様な幾何構造を持つ場合。
 - ② ソリトンなどの非自明な特殊解の近傍における時間大域挙動を解析する場合。
- などが挙げられる。このとき対応する線形シュレディンガー方程式として自由な場合では不十分であり、前者では電磁場ポテンシャルや変数係数のリーマン計量に付随したラプラス-ベルトラミ作用素、後者ではソリトン解周りでの線形化によって現れる外部ポテンシャルを伴った線形シュレディンガー作用素を考察する必要がある。

このような背景をもとに、ストリッカーズ評価を含む様々な時空間ノルム評価式の自由シュレディンガー方程式以外への拡張が行われてきた。特に、前述した電磁場による外力 (電磁場ポテンシャル) を摂動した場合と変数係数 (より一般には多様体上の) シュレディンガー方程式を考えた場合の 2 つの視点から研究が進んでいる。しかし、これまでの先行研究では、この 2 つについて別々に扱われており、統一的な視点からの解析は少なかった。

2. 研究の目的

線形シュレディンガー方程式の初期値問題に対する解の性質について、実解析的な時空間ノルム評価式 (特にストリッカーズ評価) を用いた定量的解析をおこなう。特に、上記の電磁場による外力と変数係数を同時に扱う統一的手法の開発を試みる。具体的なモデルとしては、以下の 3 点を考察する：

- (1) 調和振動子や定磁場を含む空間遠方で増大する非有界な電磁場ポテンシャル
- (2) 逆二乗関数を含む、シュレディンガー方程式のスケール則に関して臨界な特異ポテンシャル
- (3) 多様体上のラプラス-ベルトラミ作用素

3. 研究の方法

(1) 文献収集と研究集会への参加：
純粋数学の研究においては、大規模な研究設備は必要なく、雑誌論文の購読や研究集会での情報収集を通じた既存の研究手法の習得、および新たなアイデアの開拓が重要となる。本研究課題でも、雑誌論文あるいはプレプリントを含む先行結果の文献の収集と国内外の研究集会・シンポジウムへの参加を通して、研究課題に関連する情報収集を行った。

(2) 数学的な研究手法について：
具体的な数学の研究手法については関数解析的手法を基本としながら、超局所解析、散乱理論、実解析、半古典理論などを用いた。

4. 研究成果

以下では研究目的で挙げたモデル (1) ~ (3) に対して得られた結果を概説する。

(1) 非有界な電磁場ポテンシャルを伴う変数係数シュレディンガー方程式に対する有限時間ストリッカーズ評価：

前述のようにシュレディンガー方程式に対する基本解の構成やストリッカーズ評価はその応用上の重要性から、無限遠方で発散する束縛ポテンシャルを伴う場合にも (例えば調和振動子や定磁場など)、主要部が定数係数ならば多数の先行研究がある。また、主要部が変数係数の場合にも、外部ポテンシャルが有界かつ無限遠方で十分速く減衰する場合には、測地流に対する非捕捉条件のもとで多くの結果が知られている。論文 [4, 5, 6] ではそれらを統一的に扱うために漸近的ユークリッド空間上で非有界な電磁場ポテンシャルが伴う場合について考察した。まず、論文 [5, 6] ではポテンシャルが劣臨界の増大度をもつ場合に、測地流に対する非捕捉条件のもとで、自由な場合と同様の有限時間ストリッカーズ評価が成り立つことを示した。また論文 [4] では電磁場ポテンシャルの増大度が臨界あるいは優臨界の場合に、微分のロスを持つストリッカーズ評価に関する谷島-Zhang (2004) による先行研究を変数係数に拡張し、さらに定数係数の場合には最良な評価に改良した。変数係数かつ非有界なポテンシャルを摂動した場合の統一的結果はこれが初めてであり、電磁場による外力や空間非一様な幾何構造を考慮した、より一般の NLS を考察するための基礎的な結果であると考えている。

(2) 尺度臨界な特異ポテンシャルを伴う場合の時間大域的ストリッカーズ評価および局所平滑化効果：

論文 [1, 2] では逆二乗ポテンシャルを含む尺度臨界な特異ポテンシャルを伴ったシュレディンガー方程式の時間大域的ストリッカーズ評価および加藤型局所平滑化効果に

について考察した。まず、論文[2]では(負値)逆二乗ポテンシャルの結合定数がハーディの不等式の最良定数である場合に、端点を除く全ての許容対に対して通常の時間大域的ストリッカーズ評価が成立するが、端点においては弱ルベグ空間上での評価のみ成立し、特に通常の端点ストリッカーズ評価が成り立たないことを証明した。次に、論文[2]では、逆二乗ポテンシャルを含む尺度臨界な特異ポテンシャルを伴う場合に、ポテンシャルの結合定数が劣臨界ならば、自由な場合と同様のストリッカーズ評価および加藤型局所平滑化効果が成り立つことを示した。

(3) 擬リーマン計量に付随するシュレディンガー方程式の有限時間ストリッカーズ評価:

閉多様体上の二階退化楕円型作用素に付随するシュレディンガー方程式について解析した。閉リーマン多様体の場合に Burq-Gerard-Tzvetkov (2004) は微分の損失を含む有限時間ストリッカーズ評価を証明しているが、論文[3]では係数行列の退化の度合いに応じた微分の損失をもつ有限時間ストリッカーズ評価を示した。特に、係数行列が非退化な場合に(例えば擬リーマン計量に付随するラプラス-ベルトラミ作用素など)、微分の損失が最良であることも含めて、リーマン多様体に対する上記の先行研究を拡張した。一様楕円型ならば整数論を用いることで微分の損失を回復できる場合があることが Bourgain (1993) 等によって知られているが、本研究は計量の非退化性だけではそのような現象は起こらないことを示している。これは作用素の主シンボルの幾何構造とシュレディンガー方程式の平滑化効果の関係性という視点から興味深い結果であると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① H. Mizutani: Global-in-time smoothing effects for Schrödinger equations with inverse-square potentials, Proc. Amer. Math. Soc., 146(2018), 295-307. 査読有.
DOI: <https://doi.org/10.1090/proc/13729>
- ② H. Mizutani: Remarks on endpoint Strichartz estimates for Schrödinger equations with the critical inverse square potential, J. Differential Equations, 263 (2017), 3832-3853. 査読有.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.05.006>

- ③ H. Mizutani, N. Tzvetkov: Strichartz estimates for non elliptic Schrödinger equations on compact manifolds, Comm. Partial Differential Equations, 40(2015), 1182-1195. 査読有
DOI: <https://doi.org/10.1080/03605302.2015.1010211>
- ④ H. Mizutani: Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and unbounded potentials II. Superquadratic potentials, Comm. Pure Appl. Anal., 13 (2014), 2177--2210. 査読有
DOI: [10.3934/cpaa.2014.13.2177](https://doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.2177)
- ⑤ H. Mizutani: Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and unbounded potentials, Analysis and PDE, 6 (2013), 1857--1898. 査読有
DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/apde.2013.6.1857>
- ⑥ H. Mizutani: Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients and potentials at most linear at spatial infinity, J. Math. Soc. Japan, 65 (2013), 687--721. 査読有.
DOI: <http://10.2969/jmsj/06530687>

[学会発表] (計 40 件)

- ① H. Mizutani: Uniform Sobolev estimates for Schrödinger operators with scaling-critical potentials, 「2017 Taiwan Mathematical Society Annual Meeting」, National Chiayi University, Taiwan, 2017年12月9日
- ② H. Mizutani: Uniform Sobolev estimates for Schrödinger operators with scaling-critical potentials, 「Spectral and Scattering Theory and Related Topics」, 京都大学, 2017年12月6日
- ③ H. Mizutani: Uniform Sobolev estimates for Schrödinger operators, 「TOPICS IN HARMONIC ANALYSIS - Intensive Lectures Series」, Seoul National University, Korea, 2017年11月6日 - 2017年11月10日
- ④ H. Mizutani: Remarks on endpoint Strichartz estimates for Schrödinger equations with inverse-square potentials, 「Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications "Hyperbolic and

- Dispersive PDE”」, 東北大学, 2017年7月24日
- ⑤ H. Mizutani : Uniform Sobolev Estimates for the Resolvent of Scaling-Critical Schrödinger Operators and Applications, 「偏微分方程式姫路研究集会」, イーグレ姫路, 2017年3月6日
- ⑥ H. Mizutani : Uniform Sobolev estimates for the resolvent of scaling-critical Schrödinger operators and applications, 「第34回九州における偏微分方程式研究集会」, 九州大学, 2017年1月30日
- ⑦ H. Mizutani : Global-in-time Strichartz estimates for Schrödinger equations on long-range asymptotically conic manifolds, 「Tokyo-Berkeley Mathematics Workshop “Partial Differential Equations and Mathematical Physics”」東京大学, 2017年1月9日
- ⑧ H. Mizutani : Uniform Sobolev inequalities for Schrödinger operators and applications, 「International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society」, Seoul National University, Korea, 2016年10月22日
- ⑨ H. Mizutani : Strichartz estimates for Schrödinger equations on manifolds with ends, 「Lectures on Semi-Classical Analysis」, 立命館大学, 2014年7月4日
- ⑩ H. Mizutani : 変数係数シュレディンガー方程式に対するストリッカーズ評価について, 「日本数学会年会, 函数方程式論分科会特別講演」, 学習院大学, 2014年3月15日

(他 30 件については紙数の関係で省略)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 出願年月日 :
 国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
 発明者 :

権利者 :
 種類 :
 番号 :
 取得年月日 :
 国内外の別 :

[その他]
 ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

水谷 治哉 (HARUYA MIZUTANI)
 大阪大学・理学研究科・准教授
 研究者番号 : 10614985

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :

(4) 研究協力者

()