

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800088

研究課題名(和文)量子ウォークによるネットワークの構造解析に向けた研究

研究課題名(英文)Study on structural analysis of networks by quantum walks

研究代表者

瀬川 悦生 (Etsuo, Segawa)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：30634547

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では量子探索アルゴリズムの高速計算を達成させるツールとして、また物性物理の数理モデルとして研究されている量子ウォークと呼ばれるものの数理を研究した。特にグラフ上に量子ウォークを長時間走らせることによって、その空間構造を抽出することを目標に行った。長時間経過したときの無限グラフの上の量子ウォークを観測することによって、グラフのサイクルや縁が存在すると局在化と呼ばれる現象として、知らせてくれることがわかった。また局在化と同時に線型的拡がりと呼ばれる現象も同時に起こることがあり、ランダムウォークよりも時刻に対して二乗分だけ遠方に拡がる性質を有することも分かった。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied a mathematical model named quantum walk, which is investigated as quantum speed up quantum search algorithm and also a nice model accomplishing a topological insulator. In particular, by many time iterations of quantum walks on a network, we attempted to extract some structures of the network. By measuring a quantum walk on infinite graph after sufficiently large time, then we can know the existence of cycles and edges of the network as localization phenomena. We also observe its opposite property named linear spreading simultaneously. This phenomena provides which takes a quantum walker to quadratically further place comparing with random walker with respect to time iterations.

研究分野：量子ウォーク

キーワード：量子ウォーク 極限定理 固有値写像 グラフゼータ

### 1. 研究開始当初の背景

2000年ごろから量子情報の分野から現れた量子ウォークと呼ばれているランダムウォークの量子版数理モデルは、様々な分野との学際的オーバーラップが発見され研究が盛んに行われている。しかしその分多くの研究成果が混在しており、それらを統一的に理解し、解釈する必要性があった。

### 2. 研究の目的

ネットワークの空間構造を、量子ウォークを走らせることによって抽出する。また量子ウォーク写像の実効性の研究を行う。場当たりの行ってきたこれまでの一連の研究を抽象的な視点から望むことを試みる

### 3. 研究の方法

#### (1) クラスU によるネットワーク構造・環境の特徴付け

二者の間に、CMV 行列の固有値分布を媒介させることで、関係を見つけ出す。

(1)-(a)クラスU の2段階目の極限定理と固有値分布の関係: CMV 行列の固有値分布が質点を持つとき、量子ウォーク(QW)の局在化が起こることが明らかになり、固有値分布と1段階目の極限定理との関係はほぼ明確になった。しかし、CMV 行列と線形的拡がりを表す2段階目の極限定理との関係については未解決なのでここで明らかにする。

(1)-(b)CMV 行列の固有値分布とネットワーク構造・環境との関係: ネットワーク構造が原点からの距離に関する階層構造をもつとき、直線上の不均一な環境でのQWに射影することができるが分かっている。そこで本研究では距離正則な構造を持つようなネットワークに対しては、不均一な環境下でのQWに議論を置き換えて考える。最近、Cantero et al. を含めた何人かの研究者によってQWを用いた時空間離散版のAnderson局在の研究がされている。この空間的摂動がほとんど至る所で存在する環境中で起こる“局在化”は、Aizenman-Molchanovの時間発展に関するグリーン関数の評価を用いて考察されている。さらにObuse-Kawakami [Phys.Rev. B 84 195139 (2011)]によってランダムな環境でのQWの標準偏差の時間に対するオーダーが線形よりも小さい劣線形的であることが数値計算によって示唆された。QWの環境に対する描像は、少ない摂動ではクラスUに属し、一方、摂動が起こる場所が増加するにつれて、この普遍性は崩れ、劣線形的になると予想される。摂動がどのくらい多くなるとクラスUに入らなくなるのかなど、この一連の流れに対するより定量的な解析を与える。

この計画の遂行には、固有値解析の視点、物理的視点、そして統計・測度論的視点に立って論じる必要がある為、共同研究者の役割分担は次のようになっている。特に固有値解

析とQWの極限定理が本研究の鍵となる。そのため、CMV行列の本家本元の、L. Velazquez氏(Zaragoza Univ.)とCMV行列の関係を見つけたF.A. Grunbaum氏(U.C. Berkeley)、そしてQWのクラスUを与えるKonno分布と呼ばれる分布を発見し、業績[12]のモデルで二段階目の極限定理を共同で初めて見つけた今野氏(横浜国立大学)とは年に数回訪れて、単位円周上の固有値解析に関する知見を学びつつ、取り組むべき課題の共有を図るなどして、密な共同研究を行う。また、T. Luczak氏(Adam Mickiewicz Univ.)や小布施氏(Kaelsruhe Inst. Univ.)による物理的観点からのアイデアや、数値計算による示唆をメールなどのやり取りの提供により、本研究の解析的な議論に役立てる。

#### (2) QW写像の実効性の研究

グラフの専門家の知見と、QWの知見を融合させ、下記の未解決問題にあたる。

(2)-(a) 強連結グラフのグラフ同型判別問題のQWによる解決: Emms et al. の「QWの時間発展の3乗の正のサポートの固有値分布による、強連結グラフの同型判別」に対する予想問題の真偽を明確にする。

(2)-(b) 量子グラフのQW写像: Smilansky 達 [S. Gnuzmann, and U. Smilansky, Advances in Physics 55, 527-625 (2006)] の一連の研究対象である散乱行列の仕組みをよく吟味すると、各辺にユークリッド長さを持つグラフ上の線型シュレディンガー方程式系を記述する量子グラフから、あるQWが出現することが予想される。そこで、この散乱行列から得られるQWと量子グラフとの関係をここでまず明確にする。量子グラフの特性方程式は、グラフの素サイクルの構造と深い関係がある。同時に量子ソリトンと関係する量子グラフのシュレディンガー方程式に非線形な摂動を加えた場合についても考察する。

海外の協力者として、(2)-(a)では、この予想問題を立てたS. Severini氏(Univ. College London)と、(2)-(b)ではグラフ上の非線形シュレディンガー方程式系に精力的に取り組んでいるL. Adami(Univ. Milano Bicocca)の所に訪問するなどしてアドバイス・アイデアを得る。また、国内では3名のグラフとQWの専門家との知見を融合すべく、定期的に会合を開くなどしつつ具体的な解析によって解決させる。

### 4. 研究成果

#### (1) クラスU によるネットワーク構造・環境の特徴付け[1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13]

量子ウォークの中でも特に研究が盛んに行われているグローヴァーウォークと呼ばれるものに関して、アーベル被覆グラフ、いわゆる結晶格子の場合、このクラスUに入ることが分かった。アーベル被覆グラフの有限商グラフ上の拡張版セゲディーウォークの固有値分布の性質がグローヴァーウォークの挙動に反映されることを証明した。量子ウォ

ークの連続スペクトルは背後にある単純ランダムウォークのジューコフスキー逆変換によって与えられる。局在化は、結晶格子の素サイクルを反映する固有空間と、遺伝する背後にあるランダムウォークの固有値からもやってることが分かった。ここからモチベートされ、単体複体上の量子ウォークの構成に成功し、数値計算を行い、六芒星の形をした分布への収束が示唆されている。一方で、線型的拡がりには、ランダムウォークの連続スペクトルそのものではなく、その逆余弦を波数によって微分したもの(擬速度)が極限分布のサポートを与え、その二回微分(拡散係数)がその密度を与えることが分かった。またグローヴァーウォークの範疇にはいろいろなクラス量子ウォークに関しては不均一な  $Z$  上の場合においては、CMV 行列の固有値解析の知見を駆使して、クラス  $U$  に入る場合があることを証明し、縁に対して反応を示し、その必要十分条件と弱収束の極限定理を証明した。

## (2) QW 写像の実効性の研究[9,11]

グローヴァー行列の二乗のサポートに関するグラフゼータ関数を定義することができた。二つとびのサイクルで生成されるオイラー積表示で与えられる。さらにこのゼータ関数は第二種ターミナント表示からそれぞれラプラシアンと符号付きラプラシアンを誘導する頂点上の作用素の積で表わされることを証明した。そこから全域木の個数など空間構造を反映する量が抽出できた。三乗に関しては、girth が十分に大きい時には巢尾のスペクトルを求めることができ、一乗、二乗のときは描像がかなり大きく異なることを示唆した。

## 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

- [1] S. Endo, T. Endo, N. Konno, E. Segawa, and M. Takei, "Weak limit theorem of a two-phase quantum walk with one defect", accepted for publication to Interdisciplinary Information Sciences (2016) (査読あり)
- [2] E. Segawa and A. Suzuki, "Generator of an abstract quantum walk", accepted for publication to Quantum Studies: Mathematics and Foundations 3 (2016), 11-30. (査読あり)
- [3] S. Endo, T. Endo, N. Konno, E. Segawa, and M. Takei, "Limit theorems of a two-phase quantum walk with one defect", Quantum Information and Computation 15 (2015) 1373-1396 (査読あり)
- [4] K. Matsue, O. Ogurisu and E. Segawa, "Quantum walks on simplicial complexes",

Quantum Information Processing, 15, 1865-1896 (2015). (査読あり)

[5] E. Segawa, "Spectral properties of weighted line digraphs", RIMS Kokyuroku 1956 (2015) 16-28.

[6] Akira Ichihara, Leo Matsuoka, Etsuo Segawa and Keiichi Yokoyama, "Isotope-selective dissociation of diatomic molecules by terahertz optical pulses", Physical Review A 91, 043404 (2015) (査読あり)

[7] T. Machida and E. Segawa, "Trapping and spreading properties of quantum walk in homological structure", Quantum Information Processing, 14 (2015) 1539-1558. (査読あり)

[8] Takako Endo, Norio Konno, Etsuo Segawa, and Masato Takei, "A one-dimensional Hadamard walk with one defect", Yokohama Mathematical Journal 60 (2015), 49-90. (査読あり)

[9] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, "A remark on zeta functions of finite graphs via quantum walks", Pacific Journal of Math-for-Industry 6 (2014) 73-84 (査読あり)

[10] T. Endo, N. Konno, E. Segawa, and M. Takei, "A one-dimensional Hadamard walk with one defect", Yokohama Mathematical Journal 60 (2014) 49-90. (査読あり)

[11] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, "Spectral and asymptotic properties of Grover walks on crystal lattices", Journal of Functional Analysis 267(2014)4197-4235. (査読あり)

[12] N. Konno, E. Segawa, "One-dimensional quantum walks via generating function and the CGMV method", Quantum Information and Computation 14 (2014) 1165-1186. (査読あり)

[13] Y. Ide, N. Konno, E. Segawa and X.P. Xu, "Localization of discrete time quantum walks on the glued trees", Entropy: Special Issue "Advances in Information Theory" 16 (2014), 1501-1514 (査読あり)

[学会発表](計 20 件)

- E. Segawa, "Szegő class and ballistic spreading of quantum walks", (Yokohama National University, Workshop of Quantum Simulation and Quantum Walks, 2015/11/16)
- E. Segawa, "Generator of some quantum walks", 11th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Tohoku University, 2015/10/26
- E. Segawa, "Mathematical study on quantum walks and its application", (Moscow State University, Moscow State

Univ.-- Tohoku Univ., 2nd IT Joint workshop, 2015/09/07, Russia)

4. 瀬川悦生, "無限ツリー上の Grover walk の発生の固有空間", (京都産業大学, 日本数学会 2015 秋季統合分科会, 2015/09/13)

5. E. Segawa, "Orthogonal polynomials and the limit distribution of induced quantum walks on the half line", (Chungbuk National University, 10th Jikji Workshop on IDAQP, 2015/07/29, Korea)

6. E. Segawa, "Quantum walk on hyperbolic graphs", Quantum Markov Chains, Quantum Walks, and Related Topics (Henry B. Gonzalez Convention Center, San Antonio, Tex., USA 13h Jan. 2015)

7. R. Adami, R. Fukuizumi, E. Segawa, "A non linear quantum walk induced by time-independent NLS with delta interactions", 2014 年度応用数学合同研究集会(龍谷大学, 2014/12/19)

8. E. Segawa, "Quantum walks on infinite trees", Quantum Simulations and Quantum Walks 2014 (2014/11/26, Pumula Beach Hotel, KwaZulu Natal, South Africa)

9. 瀬川悦生, "量子ウォークの固有値写像について", 2014 年秋季応用数学分科会 日本数学会, 特別講演 (広島大学, 2014/09/26)

10. E. Segawa, "Limit behaviors of quantum walks and spectral measure on the unit circle", American Mathematical Society, AMS Special Session on Quantum Walks, Quantum Computation, and Related Topics (Baltimore, USA, 2014/01/18)

11. 今野紀雄, 佐藤巖, 瀬川悦生, 樋口雄介, "グラフ上量子ウォークに関する固有値写像定理", 2013 年度応用数学合同研究集会(龍谷大学, 2013/12/20)

12. E. Segawa, "Spectral mapping theorem and asymptotic behavior of quantum walks on infinite graphs", The 2nd Workshop on Spectral Graph Theory and Related Topics (2013/11/29, Tohoku University)

13. E. Segawa, "Asymptotic behaviors of quantum walks on one dimensional lattice", Quantum Science Symposium (Tokyo University, 2013/11/26)

14. E. Segawa, "On the study of quantum graph: a mapping to coined quantum walk", American Mathematical Society, Special Session on Quantum Walks and Related Topics (San Diego, USA, 2013/01/10)

15. 瀬川悦生, "量子ウォークの統計的性質と単位円周上の直交多項式", 確率論シンポジウム (京都大学数理解析研究所, 2013/12/18)

16. E. Segawa, Limit theorems for the Grover walk on crystal lattice, 25th Workshop on Topological Graph Theory (Yokohama National University,

2013/11/21)

17. E. Segawa, "Limit behavior of quantum walks on infinite graphs", Tunisia-Japan Symposium on Science, Society and Technology (Yasmin Hammamet, Tunisia, (2013/11/16)

18. E. Segawa, "Quantum walks on infinite graphs", Quantum simulations and quantum walks (Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy 2013/11/11)

19. E. Segawa, "Limit behavior of quantum walks on half line related to orthogonal polynomials", International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects Quantum dynamics and quantum walk (北海道大学, 2013/08/07)

20. E. Segawa, "Mapping theories of quantum walks, Exploring of quantum walks: approach to a material science (九州大学 マスフォアインダストリ研究所, 2013/06/17-06/21)

〔図書〕(計1件)

今野紀雄・井手勇介・瀬川悦生・竹居正登・大塚一路, 横浜発 確率統計入門 産業図書 (2014) 133(1 133)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.etsuo-segawa.com/>

6. 研究組織  
(1)研究代表者  
瀬川悦生 (Etsuo Segawa)  
東北大学・情報科学研究科・准教授  
研究者番号: 30634547

(2)研究分担者  
( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：

研究協力者

今野紀雄(Norio Konno)

横浜国立大学・工学研究院・教授

佐藤巖(Iwao Sato)

小山高等専門学校・数学科・教授

樋口雄介(Yusuke Higuchi)

昭和大学・富士吉田教育部・講師

福泉麗佳(Reika Fukuizumi)

東北大学・情報科学研究科・准教授

Riccardo Adami

Politecnico di Torino・Dipartimento di  
Scienze Matematiche・Associate professor