

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 30 日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25800094

研究課題名(和文)凸解析と不動点理論の立場からの非線形問題の究明

研究課題名(英文)A study on nonlinear problems using convex analysis and fixed point theory

研究代表者

高阪 史明(KOHSAKA, Fumiaki)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：20434003

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、凸関数や凸集合に適した解析学である凸解析学と非線形写像に対する不動点理論を用いることにより、種々の非線形問題の解の存在性と解の近似法に関する研究を行った。特に、ヒルベルト空間やバナッハ空間などの無限次元線形空間における非線形写像の不動点の存在性と不動点近似列の収束性を中心とした研究成果が得られた。さらに、その成果を凸最小化問題や単調作用素の零点問題などの非線形問題に応用し、それぞれの問題の解の存在性と解の近似法を研究した。また、線形構造を持たない測地的距離空間における凸最小化問題と不動点問題の関係についての重要な成果も得られた。

研究成果の概要(英文)：In this research, using convex analysis for convex functions and convex sets and fixed point theory for nonlinear operators, we study the existence and approximation of solutions to several nonlinear problems. In particular, we obtain several results on the existence and approximation of fixed points of nonlinear operators in infinite dimensional linear spaces such as Hilbert spaces and Banach spaces. Applying the obtained results to minimization problems for convex functions and zero point problems for monotone operators, we obtain existence and convergence theorems for such problems. We also obtain some important results on the relation between convex minimization problems and fixed point problems in geodesic metric spaces with no linear structure.

研究分野：非線形解析学とその応用

キーワード：非線形解析学 非線形問題 不動点理論 凸関数 単調作用素 ヒルベルト空間 バナッハ空間 測地的距離空間

1. 研究開始当初の背景

物理学、工学、経済学などの分野における諸問題を数学的に定式化すると非線形問題が現れる。非線形問題とは、問題を考える舞台となる集合やそこに作用する写像が非線形性を持つような問題のことである。このような問題の解については、一般に重ね合わせの原理が成り立つとは限らないため、線形問題と比べると解を得ることが難しい場合が多い。

非線形問題を解くための方法はこれまでに多くの研究者によって研究されて来たのであるが、その中に、凸解析を用いる方法と不動点理論を用いる方法がある。

凸解析は1960年代にMintyやRockafellarらによって創始された応用数学の一分野であり、非線形問題の具体的な解を求めるための有用な道具となっている。一方、不動点理論はさらに以前から研究されていたが、1960年代にBrowderやKirkらによって二点間の距離を増加させない写像に対する不動点定理が発見され、その後、多くの一般化や関連する成果が得られて来た。

互いに異なる研究分野である凸解析と不動点理論は相互に関わりを持ちながら発展している。特に、1976年のRockafellarによる先駆的な研究により、ヒルベルト空間における種々の非線形問題を非拡大写像に対する不動点理論を用いて解決できることが示された。

しかし、これら二つの分野間の相互関係は、ユークリッド空間やヒルベルト空間のような内積構造を持つ空間において十分に研究がなされているが、内積構造を持たないバナッハ空間や測地的距離空間では未解決問題が多く残されているのが現状である。

2003年から2012年にかけて研究代表者らが得た一連の研究成果により、距離関数の代わりに凸関数とその勾配を用いて定義される二変数関数を用いることで、内積構造を持たない空間においても一定の条件下で非線形問題を不動点理論の枠組みで解決できることが示された。

それらの成果は、凸解析と不動点理論の相互関係をさらに究明し、それぞれの問題設定で使用する空間の幾何構造や研究対象となる非線形写像の位相的性質と関連付けて研究を深めて行くことにより、応用分野で発生する種々の非線形問題に対する統一的な解決手法を確立できる可能性を示唆していた。以上が本研究課題の着想に至った経緯であった。

2. 研究の目的

本研究では、凸関数や凸集合に適した解析学である凸解析学と、非線形写像に対する不動点理論を用いることにより、種々の非線形問題の解の存在性や解の近似法に関する研究を行う。具体的な研究の目的は以下の通りである。

(1) 不動点問題への定式化

凸最小化問題、変分不等式問題、均衡問題、単調作用素の零点問題などの非線形問題と不動点問題の関係を究明する。特に、それぞれの非線形問題の解を何らかの非線形写像の不動点として表現する方法を研究し、不動点理論を用いて非線形問題を解決するための基礎を築く。その際、非線形写像の計算可能性にも注意を払い、計算機を用いた数値実験で使用可能な写像の導入を検討する。

(2) 不動点の存在性の研究

不動点理論において最も基本的な研究課題は、不動点がどのような状況下で存在するかという問題を解決することである。この不動点の存在問題に対する解答を与えるのが、不動点定理とよばれる不動点の存在定理である。この問題を解決するための準備として、非線形写像の定義域の幾何的構造や位相的構造を調べる。さらに、その成果を応用することにより、それぞれの非線形写像に対する不動点の存在問題を解決して行く。

(3) 不動点近似法の研究

不動点の存在問題と並んで重要な研究課題が不動点近似問題である。ここでは、不動点が存在する状況下で、不動点をどのようにして近似的に求めるかという問題を解決する。計算機の進歩により、解の存在性だけでなく、解を具体的に扱いやすい形で表示することの重要性が高まっている。不動点近似問題の研究では、不動点へと収束する点列の構成方法を考察し、それぞれの近似列の漸近挙動を数学的に解析する。また、不動点近似列の漸近挙動と不動点の存在性の間の同値性に関する研究も行う。

(4) 非線形問題への応用

最後に、上記の各段階における研究成果を用いることにより、種々の非線形問題の解の存在性と解の近似法の研究を行う。解の存在問題の研究においては、解が存在するための必要十分条件を与えることを目標とする。また、解の近似問題においては、近似解を得る際に用いる非線形写像の計算可能性に注意し、より実用性の高い近似解法の導入を検討する。

3. 研究の方法

本研究は大きく分けて、研究目的の(1)から(4)までの四つの段階からなる。基本的にこの順序で研究を進めるが、各段階で得られた成果をそれぞれの段階にフィードバックすることにより、研究課題の方向性を再検討する。このようにして個別の問題間の相互作用を活性化させることにより、それぞれの問題を解決するための方策を練る。

本研究課題の具体的な研究方法は以下の通りである。

(1) 写像列を用いた不動点近似法の研究

非線形問題の解の近似において、閉凸集合の上への射影や単調作用素のレゾルベントを用いる多くの手法が研究されて来た。それ

らの研究では、写像を定義する際に用いる係数を各反復において適切な形で更新することでより計算効率の高い近似列が得られる。ここでは、そのような解の近似法を写像列による共通不動点近似法として一般化し、異なる分野で発生する非線形問題に対して統一的に適用可能な近似解法を導入することを目標とする。

(2) 平均を用いた不動点近似法の研究

1975年にBaiillonが非線形エルゴード定理を発見して以来、非拡大写像や非拡大半群に対する様々な非線形エルゴード定理が得られて来た。特に、写像の平均や漸近的に不変な平均列を用いた総和法が知られている。ここでは、非線形エルゴード理論における研究手法を用いることにより、非線形写像やその族に対する不動点近似列の漸近挙動を解析する。

(3) 不動点の存在性の研究

非線形写像の定義域の幾何的性質と非線形写像の位相的性質が不動点の存在性にどのような影響を与えるのかという問題について研究する。その際、写像が定義される空間の単位球面の凸性や滑らかさに着目し、不動点の存在問題との相互関係を調べる。また、凸関数の最小化問題の利用や非線形エルゴード理論における漸近的線形性定理の利用などを検討する。なお、従来の手法が有効でない場合においては、空間の有限次元性を仮定した上で予備的な結果を得ることも試み、その後で、より一般的な空間設定における研究を行う。

(4) 単調作用素の零点問題の研究

凸解析と不動点理論の橋渡しの役割をするのが、単調作用素の理論である。この作用素は一般に集合値写像である。このような集合値写像を用いることにより、古典的な解析学では研究対象とならなかった微分不可能な関数の解析を行うことができる。ここでは、単調作用素のレゾルベントを用いた零点近似法や凸関数の勾配を用いた零点近似法の研究を行う。さらに、凸最小化問題や変分不等式問題などの非線形問題への応用研究を行う。

(5) 測地的距離空間での凸最小化問題

二点間を結ぶ測地線の構造を持つ距離空間では、凸最小化問題に関する未解決な問題が多く残されている。ここでは、上に有界な曲率を持つ完備測地的距離空間や非正の曲率を持つ完備測地的距離空間における凸最小化問題と不動点問題の関係について研究を行う。その際、空間の線形構造の代わりに空間の凸構造と完備性を用いることで、関数解析的手法に代わる新しい解析手法を提案し、その有用性を理論的に証明する。

本研究課題を進める中で、得られた研究成果を学術雑誌に投稿して広く公表する。さらに、国内外で開催される研究集会や国際会議に出席し、研究成果を発表するとともに、国内外の解析学者や応用数学者との活発な意

見交換を行う。

4. 研究成果

本研究課題の四年間の研究期間において、ヒルベルト空間、バナッハ空間、測地的距離空間などの各種空間における不動点問題とその応用に関する成果を得ることができた。これらの成果は、本研究費を用いることにより、研究集会・国際会議などに参加して成果発表を行い、共同研究者との研究打合せを行ったことによって得られたものである。

また、本研究課題の構想段階において、測地的距離空間における凸最小化問題と不動点問題に関する研究成果を挙げることは予想していなかった。この方面の研究が2014年から着実に進展したことは本研究課題における大きな収穫であった。

本研究において得られた成果を以下の六つに分類して解説する。

(1) 写像族に対する共通不動点近似

ヒルベルト空間における非線形写像列を用いた共通不動点近似定理を得た。ここでは、不動点との距離が増加しない写像の列を用いることにより、共通不動点への収束定理を得た。さらに、主結果を応用することにより、劣勾配射影を用いた凸集合族の共通点近似定理を示すことができた。この射影は凸関数の劣勾配を用いて定義される非線形写像であり、凸関数の劣勾配が計算できる場合には劣勾配射影を陽的な形で表示できるという特性を持つ。

また、バナッハ空間における閉凸集合の上への距離射影が持つ性質を抽象化した非線形写像の族に対する共通不動点近似問題を研究し、共通不動点への弱収束定理と強収束定理を得た。ここでは、バナッハ空間における2-様凸定数を用いた不動点近似法を新たに導入した。応用として、これまで難しいとされ未解決であったRockafellarによる近接点法に関する弱収束定理のバナッハ空間への一般化を得ることができた。

(2) ヒルベルト空間における不動点定理

本研究課題では、内積構造を持たないバナッハ空間における不動点理論とその応用を研究の中心に据えて研究を行ったのであるが、そのような一般的な空間における研究を円滑に進めるための多くのヒントは、内積構造を持つヒルベルト空間における不動点問題の研究を通して得られる。ここでは、ヒルベルト空間における二つの可換なhybrid写像に対し、写像の平均を用いた不動点近似定理を得た。

また、ヒルベルト空間における非有界閉凸集合が不動点を持たない非拡大写像を許容することを保証するRayの定理の簡潔な別証明を与えた。Rayによる最初の証明では、ヒルベルト空間における正規直交系を用いた幾何的な議論がなされ、Sineによる別証明においては、一様有界性の原理と可算個の距離射影の平均が用いられた。本論文では、一様

有界性の原理と一つの閉凸集合の上への距離射影を用いることで、不動点を持たない非拡大写像を定義した。

(3) 単調作用素の零点近似定理

バナッハ空間における値域条件を満たす単調作用素の零点近似定理を得た。この作用素は一般に集合値写像である。一方、バナッハ空間における双対性写像を用いることによって定義されるレゾルベントは一価写像となり、その不動点集合が単調作用素の零点集合と一致する。ここでは、2008年に研究代表者らが得た不動点定理を用いることにより陰的に定まる点列の漸近挙動を研究した。さらに、バナッハ空間の幾何学的性質を利用することにより、その点列が単調作用素の零点に強収束することを証明した。応用として、バナッハ空間における凸最小化問題と変分不等式問題の解の近似定理を得た。

(4) Nonspreading 写像の不動点定理

2008年に研究代表者らが導入した nonspreading 写像の不動点の存在性について研究を行った。ここでは、写像の平均と凸結合を用いて点列を定義し、点列が有界な部分列を持つことが不動点の存在性と同値であることを証明した。この成果の系として、点列のノルムが発散することと写像が不動点を持たないことが同値であることを示した。

(5) Bregman distance を用いた不動点定理

バナッハ空間におけるノルムの p 乗とその勾配を用いて定まる Bregman distance に関する Chatterjea 写像の概念を導入し、不動点の存在性と不動点の近似法の研究を行った。このような写像はヒルベルト空間における nonspreading 写像のバナッハ空間への一般化の一つである。ここでは、2014年に Suzuki が得た二重数列に関する収束定理を用いることにより、Chatterjea 写像が漸近的に正則であることを証明した。さらに、写像の定義域の凸性や写像の平均を使わずに、新しい弱収束定理を得ることができた。

(6) 測地的距離空間における凸最小化問題

非正の曲率を持つ完備な測地的距離空間(完備 $CAT(0)$ 空間又はアダマール空間という)における凸関数に対する二つの改良型近接点法についての収束定理と存在定理を得た。アダマール空間はヒルベルト空間の一般化であるが、線形構造の欠如により、従来関数解析的アプローチが有効でない場合が多く、それらの種々の課題を解決するための方策を検討する必要がある。ここでは、空間の完備性から得られる最小値定理や曲率条件から得られる不等式を利用することにより、当初に予想していた問題を全て肯定的に解決することができた。

次に、上に有界な曲率を持つ完備な測地的距離空間(完備 $CAT(k)$ 空間)における凸関数に対する最小化問題と不動点問題の関係について研究を行った。このような空間はアダマール空間を一般化するものであり、ヒル

ベルト空間の単位球面に球面距離を入れた空間がその典型例である。

ここでは、そのような空間における凸関数に対し、正接関数と正弦関数の積を利用して定まるレゾルベントの概念を導入し、不動点問題との関係性を一定の条件下で明らかにすることができた。さらに、そのようにして定まる写像がある種の nonspreading 性を持つことを証明した。この論文では、そのような写像の不動点問題を研究するとともに、凸最小化問題への応用研究を行った。

また、上記の論文において導入した凸関数のレゾルベントを用いることにより、1976年に Rockafellar が得たヒルベルト空間における近接点法の弱収束定理の $CAT(k)$ 空間版の結果を得ることができた。ここでは、点列の収束性だけでなく、点列のある種の有界性が凸関数の最小点の存在性と必要十分であることを保証する定理を得ることに成功した。それらの定理を証明するための準備として、有界点列から定まる狭義凹関数に関する最大値定理を証明し、最小化問題の研究へと応用した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計14件)

1. Yasunori Kimura and Fumiaki Kohsaka, The proximal point algorithm in geodesic spaces with curvature bounded above, *Linear and Nonlinear Analysis* 3, No.1 (2017), 133--148. (査読有)
2. Fumiaki Kohsaka and Tomonari Suzuki, Existence and approximation of fixed points of Chatterjea mappings with Bregman distances, *Linear and Nonlinear Analysis* 3, No.1 (2017), 73--86. (査読有)
3. Yasunori Kimura and Fumiaki Kohsaka, Two modified proximal point algorithms for convex functions in Hadamard spaces, *Linear and Nonlinear Analysis* 2, No.1 (2016), 69--86. (査読有)
4. Yasunori Kimura and Fumiaki Kohsaka, Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 18, No.1 (2016), 93--115 (First online: 31 October 2015). (査読有)
5. Fumiaki Kohsaka, Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 16, No.11 (2015), 2193--2205. (査読有)

6. Fumiaki Kohsaka, Ray's theorem revisited: a fixed point free firmly nonexpansive mapping in Hilbert spaces, *Journal of Inequalities and Applications* 2015: 86 (2015), 1--3. DOI: 10.1186/s13660-015-0606-7 (査読有)
 7. Fumiaki Kohsaka, Weak convergence theorem for a sequence of quasinonexpansive type mappings, *Proceedings of the 8th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, 289--300, 2015. (査読有)
 8. 高阪史明, バナッハ空間における firmly nonexpansive-like 写像に対する不動点近似, *非線形解析学と凸解析学の研究*, 京都大学数理解析研究所講究録 1963 (2015), 170--177.
 9. Fumiaki Kohsaka, An implicitly defined iterative sequence for monotone operators in Banach spaces, *Journal of Inequalities and Applications* 2014: 181 (2014), 1--9. DOI: 10.1186/1029-242X-2014-181 (査読有)
 10. Koji Aoyama and Fumiaki Kohsaka, Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings, *Fixed Point Theory and Applications* 2014: 95 (2014), 1--13. DOI: 10.1186/1687-1812-2014-95 (査読有)
 11. Fumiaki Kohsaka, Averaged sequences for nonspreading mappings in Banach spaces, *Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV*, 313--323, 2014. (査読有)
 12. Koji Aoyama and Fumiaki Kohsaka, Viscosity approximation process for a sequence of quasinonexpansive mappings, *Fixed Point Theory and Applications* 2014: 17 (2014), 1--11. DOI: 10.1186/1687-1812-2014-17 (査読有)
 13. 高阪史明, 集合値写像の零点問題と関連する不動点定理, *函数解析学による一般化エントロピーの新展開*, 京都大学数理解析研究所講究録 1852 (2013), 25--32.
 14. 高阪史明, ハイブリッド写像の不動点について, *非線形解析学と凸解析学の研究*, 京都大学数理解析研究所講究録 1841 (2013), 77--85.
- [学会発表](計 17 件)
1. Fumiaki Kohsaka, Minimizing convex functions in geodesic metric spaces with curvature bounded above, in *The International Conference on New Trends in Optimization and Variational Analysis for Applications*, Quy Nhon University, Quy Nhon, Vietnam, December 8, 2016.
 2. Fumiaki Kohsaka, Spherically nonspreading mappings in geodesic metric spaces with curvature bounded above, in *The 5th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization*, Toki Messe, Niigata, Japan, August 5, 2016. (新潟県・新潟市)
 3. Fumiaki Kohsaka, Existence and approximation of minimizers of convex functions in geodesic metric spaces, in *The 9th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization*, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok, Thailand, May 19, 2016.
 4. 高阪史明, アダマール空間における凸関数の最小点近似, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学千里山キャンパス, 2016 年 9 月 17 日. (大阪府・吹田市)
 5. 高阪史明, Common fixed points of two commutative hybrid mappings in Hilbert spaces, *非線形解析学と凸解析学の研究*, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 9 月 1 日. (京都府・京都市)
 6. 高阪史明, 凸最小化問題と関連する非線形写像とその不動点について, *数理経済学会 2016 年度定例セミナー*, 法政大学市ヶ谷キャンパス, 2016 年 6 月 10 日. (東京都・千代田区)
 7. Fumiaki Kohsaka, An implicitly defined iterative sequence for maximal monotone operators in Banach spaces, in *VII Symposium on Nonlinear Analysis*, Nicolaus Copernicus University, Torun, Poland, September 17, 2015.
 8. Fumiaki Kohsaka, Asymptotic behavior of averaged sequences for nonspreading mappings in Banach spaces, in *The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015*, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, Japan, September 2, 2015. (福岡県・北九州市)
 9. Fumiaki Kohsaka, Mean convergence theorems for pointwise convergent sequences of hybrid mappings, in *The Ninth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, Rimkok Resort Hotel, Chiang Rai, Thailand, January 21, 2015.
 10. 高阪史明, バナッハ空間における極大単調作用素に対する陰的な零点近似列

の強収束性, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学筑波キャンパス, 2016 年 3 月 18 日. (茨城県・つくば市)

11. Fumiaki Kohsaka, Finding fixed points of firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces, in The International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, Uludag University, Bursa, Turkey, June 24, 2014.
12. 高阪史明, Fixed point approximation for firmly nonexpansive-like mappings in Banach spaces, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 8 月 21 日. (京都府・京都市)
13. Fumiaki Kohsaka, Strong convergence theorem for a strongly relatively nonexpansive sequence of mappings, in The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, December 20, 2013.
14. Fumiaki Kohsaka, On firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces, in The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki University, Hirosaki, Japan, August 4, 2013. (青森県・弘前市)
15. Fumiaki Kohsaka, Unbounded sets and nonexistence of fixed points in Banach spaces, in The International Conference Anatolian Communications in Nonlinear Analysis, Abant Izzet Baysal University, Bolu, Turkey, July 3, 2013.
16. 高阪史明, ヒルベルト空間におけるハイブリッド写像に対する不動点問題, Miniworkshop on Analysis at Kagurazaka, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2014 年 3 月 14 日. (東京都・新宿区)
17. 高阪史明, 二変数関数の鞍点と非線形写像の不動点, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学城北キャンパス, 2013 年 9 月 24 日. (愛媛県・松山市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高阪 史明 (KOHSAKA, Fumiaki)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号: 20434003