

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25870334

研究課題名(和文)非コンパクト空間上の幾何解析と力学系

研究課題名(英文)Geometric analysis and dynamics on non-compact spaces

## 研究代表者

塚本 真輝(Tsukamoto, Masaki)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：70527879

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：時間発展するシステムを力学系と呼ぶ。力学系が単位時間辺りに持つ自由度を平均次元と呼ぶ。本研究はこの平均次元について主に研究した。  
まず幾何学から現れる力学系に対して、その平均次元を計算するための組織的な手法を開発し、その応用として世界的に著名な数学者であるグロモフ氏が10年以上前に出した問題を解決した。  
また平均次元の基礎理論の研究も行い、大きな成果として、フィールズ賞受賞者であるリンデンシュトラウス氏が10年以上前に提案した問題を解決した。その過程で、信号処理(音楽や映像の処理のようなもの)と力学系との予想外の関連性を発見した。

研究成果の概要(英文)：Time-evolving systems are called dynamical systems. The number of freedom of dynamical systems per second is called mean dimension. We study this quantity mainly. First we develop a systematic method to calculate mean dimension of dynamical systems coming from geometry. As an application, we solved a problem which was posed by world-famous mathematician Gromov more than 10 years ago. We also study a foundational issues about mean dimension. A big success is the resolution of a problem which was posed by a Fields medalist Lindenstrauss more than 10 years ago. In the process of this success, we found an unexpected relation between signal processing (a kind of music or movie process) and dynamics.

研究分野：数学

キーワード：力学系 幾何解析 信号処理 平均次元 正則曲線 位相的エントロピー

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 時間発展するシステムを力学系と呼び、それが単位時間辺りに持つ自由度を平均次元と呼ぶ。この不変量はミハイル・グロモフの1999年の論文で導入された。導入当初は、その後フィールズ賞をとることになるエロン・リンデンシュトラウスによって研究されたことで、発展するかに見えたが、グロモフ、リンデンシュトラウスともにこのテーマから離れてしまい、当該研究者がこのテーマに取り組むまで実質的に何の発展もない状態が続いた。

(2) そのため、まず第一に、この不変量の計算方法が未発達のままであった。当該研究者によって、平均次元を下から評価するための無限次元の変形理論はすでに開発されていたが、一方で平均次元を上から評価する手段がほとんどなかった。あるのはサンプリングの手法、およびそれと組み合わせる使うネバンリンナの第一主要定理だけであったが、これは非常に柔軟性を欠いた手法であり、幾何学的な状況に対応できなかった。

(3) 第二に、平均次元の基礎理論が未熟なままであった。特に、基礎理論を発展させるうえで、リンデンシュトラウスによる「位相的口ホリンの補題」が柔軟性を十分に持っていないことが問題であった。

### 2. 研究の目的

(1) 平均次元の計算方法がほとんど知られていなかったことから、その組織的な開発を必要とした。特に、幾何学的な例から生じる力学系の平均次元の計算方法が強く望まれた。幾何学から生じる力学系の平均次元に関しては、グロモフがさまざまな問題を提案しており、それを解決することが具体的な目標の一つであった。

(2) リンデンシュトラウスによって、平均次元の基本的な性質の一部が明らかにされたが、その後未発達のまま放置されていた。そのため、リンデンシュトラウスの理論をさらに発展させ、平均次元の基礎理論を打ち立てる必要があった。具体的には、まず理論をランク1の加法群作用の場合から、高ランクアーベル群の場合に拡張することが望まれた。また、リンデンシュトラウスによって、平均次元の基礎理論に関する問題がいくつか提案されており、これを解決することも具体的な目標の一つとなった。

### 3. 研究の方法

(1) まず平均次元の計算法の開発に関して述べる。上で述べたようにサンプリングの手法を超える、平均次元の新しい上からの評価が必要であった。そこで、情報理論のアイ

デアを組み合わせる手法を用いた。具体的には、ある精度のレベルで打ち切ったエントロピーの評価を精密に行うことで、サンプリングとは異なる、平均次元の上からの評価を行う手法を幾何学的な状況で組織的に開発した。

(2) 次に平均次元の基礎理論開発について述べる。「位相的口ホリンの補題」を乗り越えることが問題なわけだが、突き詰めると問題の本質は、力学系の軌道を適切に分割し、さらに各ピースを適切にコントロールする手法の開発にあることが分かり、それに力を注いだ。

1 まず群作用を高ランクアーベル群の場合に拡張する問題に関しては、組み合わせ幾何学で著名なポロノイタイリングを用いる手法と、「自由度を一つ追加する」という一見トリッキーに思われる手法を用いて、「位相的口ホリンの補題」の代わりに力学系の軌道を分割するというアイデアを用いた。ポロノイタイリングは、幾何学の分野では非常に有名な手法であるが、力学系の分野で使われたことは数少ない。さらに、「自由度を一つ追加する」というアイデアは力学系で他に使われた例を当該研究者は知らない。従って、かなり新しい研究手法の開発に成功したといえるだろう。

2 リンデンシュトラウスが提案した問題の攻略については、1での「軌道分割」の手法をさらに洗練化することが鍵であることが分かった。具体的には、分割されたピース同士の間である種の「相互扶助」のシステムを作り上げて、コントロールの難しいピースを減らしていく手法が必要であることが分かり、その開発を行った。ただ、それだけでは、後一步足りないこともわかり、さらに新しい手法として、応用数学で基本的な分野の一つである信号処理(音楽や映像の処理のようなもの)のテクニックを力学系の手法に組み合わせるという非常に斬新なアイデアを思いつき、それを研究した。

### 4. 研究成果

(1) 4次元のヤンミルズゲージ理論や正則曲線の理論から生じる力学系の平均次元を計算する手法に成功した。特にその応用としてミハイル・グロモフ氏が1999年に提案した問題を解決した。これについて以下詳述する。

複素平面から複素射影空間へのリプシッツ正則写像をプロディ曲線と呼ぶ。これが成す力学系の平均次元を計算する問題をグロモフは10年以上前に提案した。当該研究者はこの問題を解決し、「平均次元はエネルギー密度で表される」という公式を確立した。最終的な結論は非常にシンプルで美しい式と

なっている。

世界的に極めて著名な数学者であるミハイル・グロモフの問題を解決したというだけでも大きな成果といえるが、さらにその解決の手法が画期的であった。実際、「研究の方法」欄でも述べた、エントロピーを用いて平均次元を評価する手法の開発に成功し、結果として、幾何学的な状況にも対応可能な、非常に柔軟性に富んだ平均次元の評価法が生まれることになった。この手法は確実に今後、さらなる応用を生んでいくであろう。

実際、4次元のヤンミルズゲージ理論から生じる力学系の場合にも、エントロピーを用いる手法は適応可能であり、プロディ曲線の場合と類似の公式が証明される。ゲージ論に関するこの結果はすでに学術誌に掲載決定済みである。次項の「主な発表論文等」の雑誌論文の一番を参照せよ。

幾何学から生じる無限次元力学系の平均次元を評価する問題をグロモフ氏は、上記のプロディ曲線の場合以外にも複数提案しており、今回の研究によって生まれた新手法が、今後、これらのグロモフ氏の問題を研究していく上でも大きな役割を果たすことが期待される。

また、より応用数学的な観点として、エントロピーに基づく次元の評価というアイデアがクローズアップされたことが大きな意味を持つと考えている。エントロピーは現代の情報理論における重要な量であり、我々の幾何学的観点から、エントロピーに対して、新たな取り組み方が生まれる可能性がある。次の(2)で述べる「信号処理と力学系理論の新たな関連性」のアイデアと相まって、大きな応用が期待される。

(2)次に平均次元の基礎理論開発に関する成果を述べる。

1 高ランクアーベル群の作用に関する平均次元の基礎理論を開発した。実際、リンデンシュトラウスが1999年の論文でランク1の場合に確立した諸結果をすべて高ランクの場合に拡張することに成功した。

具体的には、平均次元がゼロの力学系の位相的エントロピー理論による特徴づけ、平均次元と距離平均次元の等価性、平均次元の力学系の埋め込み問題への応用、の3つのテーマに関して、リンデンシュトラウスの1999年の論文と同様の主張を高ランクアーベル群作用の場合に確立した。

特にその過程で、「位相的口ホリンの補題」よりも柔軟に「力学系の軌道を分割する」手法の開発に成功した。この成果はすでに、幾何学および解析学関連のトップジャーナルの一つである学術誌 *Geometric and Functional Analysis* に掲載決定済みである。次項の「主な発表論文等」欄の雑誌論文の2番を参照せよ。

またさらにこの「軌道分割」の手法は次の2

の研究にも生かされおり、今後多様な研究者によってより大きく発展させられることが期待される。

高ランクアーベル群の作用を考えることは、統計力学の観点からは極めて基本的である。なぜなら、我々の空間は少なくともマクロのレベルでは3次元ユークリッド空間であり、空間方向のシフト(ランク3のアーベル群作用に相当する)に対して不変な性質を考えることが本質的だからである。したがって、今回の研究によって、平均次元理論が数理科学のより幅広い範囲に広がっていくためのインフラ整備に成功したといえるだろう。

2 次にリンデンシュトラウスの提案した問題の解決について述べる。彼の提案した問題の中で最重要なものの一つが次であった:「極小力学系がヒルベルト立方体上のシフトに埋め込めるための平均次元に関する条件をベストにせよ。」非常に大きな研究成果として、この問題を解決することに成功した。

答えは「平均次元が2分の1未満なら埋め込める」というものである。(平均次元がちょうど2分の1の時には埋め込めない例があることは、リンデンシュトラウスと当該研究者の以前の論文によって既に証明されていたので、この結果は最良の主張であることが分かる。)

その手法として、研究の方法欄で述べた「分割された軌道のピース間の相互扶助システム」の開発及び、信号処理の手法の力学系への応用の発見に成功した。

フィールズ賞受賞者であるリンデンシュトラウスの問題を解決したというだけでも大きい成果であるが、さらに重要な点として、信号処理と力学系理論に関連性を見つけた点でこの仕事は画期的といえる。

実際、信号処理と力学系理論とに関連性があるなどは、世界中で誰も想像したことすらなかったはずである。そのような奇想天外な関連性の発見によって、リンデンシュトラウスの提案した困難な問題が解決したということは、驚くべきことであった。

信号処理と力学系理論とのつながりは、まだ生まれたばかりの新分野であるが、非常に将来有望であり、今後さらに大きく発展することが強く期待される。

実際、信号処理は現代技術の基幹の一つであり、最終的には、非常に大きな実学的な応用さえあり得るかもしれない。また、そこまでいかなくとも、情報理論の純理論的な側面に対して応用がある可能性が非常に高いと考えている。

また、純粋数学の範囲に限っても、この手法が応用可能な問題は幅広い。例えば、リンデンシュトラウス氏が提案した重要な問題は、上で議論した「埋め込み問題」以外にも複数あり、これらの問題に対して信号処理のアイ

デアは新しい視点を与えられると思われ。さらに、(1)で述べたプロディ曲線の研究はある意味で「非線形な信号処理」と考えられるものである。したがって、平均次元理論全体に対して、信号処理は非常に統一的な視点を与えつつある。そして、そのような研究のランドマークとなる結果を当該研究者たちは証明したといえるだろう。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 2 件)

1 Masaki Tsukamoto, Large dynamics of Yang-Mills theory: mean dimension formula, Journal d'Analyse Mathématique, 査読あり, 掲載決定済み, 印刷中のため巻, 発行年, ページ, DOI 及び URL は未定.

2 Yonatan Gutman, Elon Lindenstrauss, Masaki Tsukamoto, Mean dimension of  $Z^k$ -actions, Geometric and Functional Analysis, 査読あり, 掲載決定済み, 印刷中のため巻, 発行年, ページ, DOI 及び URL は未定.

〔学会発表〕(計 16 件)

1 塚本真輝, 極小力学系をヒルベルト立方体に埋め込む, 多変数関数論冬セミナー, 2015年12月25日, 京都大学(京都市)

2 塚本真輝, 極小力学系をヒルベルト立方体に埋め込む, 作用素環論の最近の進展, 2015年8月20日, 京都大学(京都市)

3 塚本真輝, プロディ曲線の成す力学系の平均次元, 第10回鹿児島代数幾何解析セミナー, 2015年2月17日, 鹿児島大学(鹿児島市)

4 Masaki Tsukamoto, Mean dimension of the dynamical system of Brody curves, Geometric Methods of Complex Analysis, 2015年1月26日, Oberwolfach 研究所(ドイツ)

5 塚本真輝, プロディ曲線の成す力学系の平均次元, 東北大学数学科談話会, 2014年10月20日, 東北大学(仙台)

6 Masaki Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, Fields medal symposium, 2013年10月1日, University of Toronto(カナダ)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等 なし.

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

塚本 真輝 (TSUKAMOTO, Masaki)  
京都大学・大学院理学研究科・助教  
研究者番号: 70527879