様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：２１４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2015
課題番号：２５８７０５７７

研究課題名（和文）射影法に基づく制御モデル構築法の開発

研究課題名（英文）Development of iterative methods for construction of control model based on the projection method

研究代表者
松下　慎也（Matsushita, Shin-ya）

秋田県立大学・システム科学技術学部・准教授

研究者番号：２０４３５４４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、制御理論における問題に対する実用的な求解法を開発することを目的とする。線形行列不等式は制御理論で重要な役割を果たしており、制約可能性問題として定式化できるため、制約可能性問題に対する射影法に基づく解法の研究をおこなった。制約可能性問題に対する高速反射射影法、Douglas-Rachford法とHaugazeau法の特性を理論的、数値的に調査した。

研究成果の概要（英文）：This research aims to develop efficient iterative methods for solving problems in control theory. Since linear matrix inequalities which play an important role in system and control theory, can be formulated as convex feasibility problems, we studied iterative methods based on the projection method for convex feasibility problems. We investigated theoretical and numerical properties of the accelerated refection projection method, the Douglas-Rachford method and the Haugazeau-like method for the convex feasibility problem.

研究分野：数理工学

キーワード：射影法　制約可能性問題　線形行列不等式

１．研究開始当初の背景

実社会における様々な問題はしばしば複数の集合の共通部分として自然に表現する事ができる。このモデルは制約可能性問題と呼ばれ、所望の条件を全て満足する解を見つけるための理想的な数理モデルであり、数学だけにとどまらず工学、経済学などの問題を含む非常に有用な問題である。

これまでの研究において、制御理論で頻繁に現れる線形行列不等式(Linear Matrix Inequality：LMI)に対する制約可能性問題からのアプローチが行われており、問題を構成する集合に対する射影を用いた解法（射影法）を適用する研究が行われていた。この射影法は集合が閉凸集合という仮定の下で問題の解に収束することが保障されているが、収束レートを導出するには集合に対して特殊な条件を追加する必要があった。また、具体的なLMI可解問題に射影法を適用して解く際、特定の問題に対して収束の精度が悪化する事例が報告されており、それらの問題を解決するためのより洗練された理論の構築が急務となっている。

２．研究の目的

制御理論で現れる要求仕様の多くは未知数に依存する複数の行列の不等式制約として表現され、それらはLMIとして定式化することができる。本研究は、LMI 可解問題が閉凸集合と開凸錐という構造を持った2つの集合の制約可能性問題として扱うことができることに注目し、その問題に対する理論的基盤に立脚した実用的な解法を開発することにより、射影法及び関連する解法の応用領域の拡大を目指す。

３．研究の方法

制約可能性問題はこれまで様々な角度から研究されてきた。本研究では、LMI 可解問題を記述できる制約可能性問題を扱い、はじめに既存の射影法について詳細な検討を進めることでその高速化を可能にする手法について調査する。また、関連する解法（Douglas-Rachford法やHaugazeau法）を扱い、それぞれの適切性等を考察することでより高速で正確に問題を解決できる求解法の開発を目指すものである。

研究を進める上の方針として、先行研究で使われていた条件（スレーター条件）を今回の問題でも仮定する。この条件はLMI可解問題では常に成り立っている条件である。これにより、射影法が有限回の繰り返しで解に到達する事が保証される。実際の具体例を使った数値例において計算機を援用することで解法がどのような挙動で解に到達するか確認しながら研究を進める。

以下では問題解決のために重点を置く題材の詳細を示す。

(1) 射影法の高速化について考察する。射影法にはスレーター条件の仮定の下で有限回の繰り返しで解に到達する事が知られている。射影法について収束が保障される条件などを考察することで、解法の一般化や点列の構成方法を再検討し、改良を加えることでその収束の性質について考察する。

(2) 制約可能性問題に関連する解法の収束性について考察する。特に最適化理論において近年注目されている Douglas-Rachford 法に焦点を当て、スレーター条件の下で有限回の繰り返しで解に到達するかどうかを考察する。さらに Douglas-Rachford 法に対して収束の速度に関する先行研究が進められているため、それらの結果が今回考える制約可能性問題に適用できるかについて調査する。

(3) 最良近似問題に対して有効な方法として知られている Haugazeau 法の収束性及び解の存在性との関係について考察する。Haugazeau 法は一般的に収束が他の解法よりも収束の速度が劣る反面、この方法は解の存在性と点列の有界性が密接に関係していることが知られているため、制約可能性問題の解の存在性との関連についても考察し、数値実験を通してその有効性の検証を進める。

(4) 提案された新しい解法は、具体的な問題（LMI 可解問題、行列近似問題等）に適用することで得られた数値実験の結果から解法の収束速度、効率や精度について詳細を検証する。汎用性を持った精度の高い解法を目指し、高速化及び精度向上のための改良について検討する。実装するソフトウェアとしてMATLABの使用を予定している。

次に具体的な研究方法について示す。国内外の関連する研究集会（京都大学数理解析研究所など）、学会（日本数学会、OR学会など）に積極的に参加する。また、参加者達と本研究に関する意見交換を行う。まとめた研究成果について研究集会、学会の場で発表する。

関連書籍、オンラインジャーナル（SIAM J. Optim.、 Math. Oper. Res.など）や関連する分野の研究者たちとの打合せ、電子メールでのやり取りを通して本研究に関する情報を収集する。また、プレプリントサーバ（arxiv、Optimization Online）や、関連分野の研究者が公開しているWebページの情報を参考にする。

得られた成果を論文としてまとめ、学術論文誌に投稿する。また、研究成果は自身のWebページに記載することで広く外部に情報を公開する。

ソフトウェア（MATLAB）を援用した数値実験を実施し、提案した解法の有効性について検証を実施する。

４．研究成果

研究の方法で挙げた題材に対して、以下の成果が得られた。

(1) 射影法に対する高速化手法の開発：閉凸集合に対する射影を用いることで、反射と呼ばれる写像が定義できる。通常の射影は集合の境界に点を写すのに対して、反射は集合の内側に点を写すという性質を持つため、解の近似を考える上でより少ないステップ数で解に到達する効果が期待できる。本研究では、反射と凸結合を組み合わせた新たな解法を提案した。提案した解法はスレーター条件の仮定の下で有限回の繰り返しで解に到達することを示すとともに、繰り返し回数の上界も与えることができた。また提案した解法は既存の射影法を含む特徴を持ち、凸結合のパラメータを変更することで古典的な射影法よりも高い精度で解に到達することが数値実験から検証された。得られた研究成果は論文としてまとめ、学術雑誌に掲載された。関連する研究成果は弘前大学、台湾の National Sun Yat-sen University で開催された国際会議（NACA2013、ICNAO2013）でそれぞれ発表した。

(2) 制約可能性問題に対する Douglas-Rachford 法に関する研究：Douglas-Rachford 法は 2 つの凸関数の和の最小化問題を解くために有効な方法として古くから研究されている解法である。最近になってその収束レートや圧縮センシング等への応用に関する研究成果が次々と発表されており、大きな注目を集めている。本研究では Douglas-Rachford 法の制約可能性問題への応用について調査した。今回の制約可能性問題は特殊な構造を持つため、問題に適用するため点列の構成方法に改良を追加した。さらにスレーター条件の仮定の下では解法が有限回の繰り返しで必ず解に到達することを示し、繰り返し回数の上界も与えた。提案した解法は LMI 可解問題に適用した際、有限回で解に適用することが保障されている。また有効性を検証するために MATLAB を用いた数値実験を実施し、既存の解法よりも速く高い精度で解に到達することが検証できた。さらに解法の収束のレートに関する評価式及び解法が確実に解に含まれる事を保障する条件式を与えた。これらに関する研究は本研究以前にはほとんど見当たらなかったものであり、この成果は今後の研究の発展に貢献するものと期待できる。得られた成果を論文としてまとめ、研究成果を 2014 年の日本数学会及び京都大学数理解析研究所研究集会（「非線形解析学と凸解析学の研究」）にて発表した。

(3) Haugazeau 法に関する研究：Haugazeau 法は求めたい問題の解を求めるために、2 つの半空間を構成し、その共通部分に射影することで点列を構成する解法である。Haugazeau 法は Douglas-Rachford 法に比べると収束の速度が劣るものの、収束先が解法の初期点から最も近い解となるという特徴を持つことが知られている。本研究では 2 つの極大単調作用素の和の零点問題に Haugazeau 法を応用し、解の存在性と解法の挙動についてその詳細を調査した。先行研究では解が存在するという仮定の下で、解法の収束について結果が得られていた。一方、問題の解が存在しない場合、解法の挙動に関するまとまった成果はほとんど見当たらなかった。本研究では Haugazeau 法の有界性が 2 つの極大単調作用素の和の零点の解の存在を保証することを示した。さらに MATLAB を使って解が存在しない行列近似問題を具体的に作成し、Haugazeau 法を適用することで理論的な結果の検証を行った。今回扱った問題は 2 つの凸関数の和の最小化問題、制約可能性問題、相補性問題など、幅広い応用をもち、これまで解の存在性の検証が困難であった問題に対する応用も今後予想され、得られた成果の応用分野の拡大に貢献することが期待できる。関連する研究成果を 2015 年の日本数学会及び京都大学数理解析研究所研究集会（「非線形解析学と凸解析学の研究」）にて発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

[1] Shin-ya Matsushita, Li Xu, On projection reflection method in Hilbert spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 査読有, Volume 16, pp. 2221-2226 (2015). URL:http://www.ybook.co.jp/online2/jncav16n11.html

[2] Shin-ya Matsushita, Li Xu, Accelerated refection projection algorithm and its application to the LMI problem, Optimization, 査読有, Vol. 64, pp. 2307-2320 (2015). DOI:10.1080/02331934.2014.959012

[3] Shin-ya Matsushita, Li Xu, On convergence of the Douglas-Rachford method in Hilbert spaces, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無. 1963, pp. 218-222 (2015).

[4] Shin-ya Matsushita, Li Xu, On finite convergence of iterative methods for variational inequalities in Hilbert spaces, Journal of Optimization Theory and

Applications, 査読有, Vol.161, 701-715 (2014). DOI 10.1007/s10957-013-0460-z

〔学会発表〕(計 6 件)

[1] Shin-ya Matsushita, 最良近似問題について, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会・実関数論分科会, 平成27年9月15日, 京都産業大学.

[2] Shin-ya Matsushita, On convergence of the method for best approximation problem, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 平成 27 年 9 月 8 日, 京都大学数理解析研究所研究.

[3] Shin-ya Matsushita, On finite termination of algorithms, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会・実関数論分科会, 平成 26 年 9 月 27 日, 広島大学.

[4] Shin-ya Matsushita, On convergence of the Douglas-Rachford method, 京都大学数理解析研究所研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 平成 26 年 8 月 21 日, 京都大学数理解析研究所研究.

[5] Shin-ya Matsushita, On projection methods in Hilbert spaces, The international conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2013 年 12 月 20 日, National Sun Yat-sen University, Taiwan.

[6] Shin-ya Matsushita, On accelerated projection methods, The eighth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2013 年 8 月 3 日, 弘前大学.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ
http://www.akita-pu.ac.jp/system/elect/sce/matsushita/

6．研究組織
(1)研究代表者
松下　慎也（MATSUSHITA　SHIN-YA）
秋田県立大学・システム科学技術学部・准教授
研究者番号：20435449

(2)研究分担者
該当無し

(3)連携研究者
該当無し