

平成 27 年 5 月 15 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887005

研究課題名(和文) 回転流体に現れる分散性と異方性の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of dispersion and anisotropy in rotating fluids

研究代表者

高田 了 (TAKADA, RYO)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：50713236

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、回転流体の運動を記述する非線形偏微分方程式を中心として、その数学解析を行った。特に、Coriolis 力から生成される時間発展作用素に対して分散型評価および時空積分評価を導出し、その応用として、非圧縮性回転 Euler 方程式の初期値問題に対する長時間可解性を証明した。本研究で得られた成果および解析手法は、回転浅水方程式や primitive 方程式の数学解析に対しても応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：This research project aims to analyze nonlinear partial differential equations describing the motion of incompressible rotating fluids mathematically. We established dispersive and space-time estimates for the linear propagator generated by the Coriolis force. As an application, we proved the long time existence of solutions to the initial value problem for the incompressible rotating Euler equations. It is expected that our results and techniques obtained in this research can be applied to the study of the rotating shallow water equations and the primitive equations.

研究分野：数物系科学

キーワード：偏微分方程式 流体力学 非圧縮性流体 回転流体 Navier-Stokes 方程式 Euler 方程式 Coriolis 力 分散型評価

## 1. 研究開始当初の背景

大気や海洋などを代表とする大規模な地球流体の特徴として、流れの様相が成層と回転の大きな影響下にあることが挙げられる。この成層と回転は、どちらも流れを2次元化する強い異方性を有することが知られている。回転流体に対する非線形偏微分方程式の観点からの数学解析として、Babin, Mahalov, Nicolaenko (1995, 1999)による研究があり、周期境界条件下における回転 Navier-Stokes 方程式の初期値問題に対して、流体の回転速度が大きいほど系は安定となり、大きな初期速度場に対しても滑らかな時間大域解が存在することが証明された。この結果は、2次元における Navier-Stokes 方程式の大きな初期速度場に対する時間大域的適切性に対応しており、回転の影響が流れを2次元化することを数学的に示唆したものと見える。本研究では、全空間において Coriolis 力が呈する分散性に着目し、回転 Navier-Stokes 方程式および回転 Euler 方程式の初期値問題に対する数学解析を行った。

## 2. 研究の目的

本研究では、大気や海洋などを代表とする大規模な地球流体において、回転が流れの様相に及ぼす影響やその仕組みを、非線形偏微分方程式の観点から数学的に解析することを目的としている。特に、Coriolis 力から生成される時間発展作用素に対する線形分散型評価と、その非線形問題への応用を主題としている。具体的な研究内容を以下で述べる。

### (1) 異方的微分作用による強い分散性の導出

3次元全空間において、鉛直軸の周りを回転する流体の分散性は、Coriolis 力に対応した線形作用素によって生成される時間発展群に対する時間減衰評価および時空積分評価として数学的に定式化される。研究代表者はこれまでの研究において、時空積分評価の成立する時空可積分指数の最適な許容範囲を導出した。その証明においては、時間発展群の相関数をグラフとする曲面の退化点の詳細な解析が重要となり、実際に曲面が水平成分 $(x_1, x_2)$ および鉛直成分 $x_3$ が零となる点で退化することが確認される。従って、水平方向に関する微分作用素および鉛直方向に関する微分作用素の作用によって曲面の退化性が緩和され、時間発展群に対する時空積分評価は、その許容範囲が広がることが期待される。本研究では上記の問題に対する考察を行い、水平方向と鉛直方向それぞれに対する分散性の影響を精密に特徴付けることを目標とした。

### (2) 回転 Euler 方程式の長時間可解性

3次元全空間において Coriolis 力の影響を

考慮した非圧縮性 Euler 方程式に対して、その初期値問題の長時間可解性を考察する。現在までの先行研究では、長時間可解性を得るための十分条件として、初期速度場に  $7/2$  より大きな Sobolev 正則性が課されていた。これは、時間局所解の爆発判定法に時空積分評価を適用する際に、時間発展作用素が平滑化効果をもたないため1階微分の損失が起ることに起因する。しかし、Euler 方程式が1階双曲型であることを考えると、初期速度場の Sobolev 正則性は  $5/2$  より大きい場合が自然であると考えられる。本研究では上記の考察にもとづき、同方程式の長時間可解性を最良の Sobolev 正則性で証明することを目的とした。

### (3) 成層回転流体に対する分散型評価

温度成層と回転が共存する状況で、回転 Boussinesq 方程式に対する線形分散型評価および時間大域的適切性を考察する。成層と回転が共存する場合、対応する時間発展作用素に対する分散型評価や時空積分評価は、周波数領域を大きく制限した場合や熱核と連結した場合などの部分的な結果しか得られていない。本研究では、回転が単独で存在する場合に用いた研究手法を応用・発展させ、成層と回転が共存する場合の最適な線形分散型評価を確立し、その応用として非線形方程式の初期値問題に対する時間大域的適切性を証明することを目的とした。

## 3. 研究の方法

本研究では、共同研究者や関連分野の専門家との討論・意見交換および情報収集が重要な役割を果たした。そのため、必要となる偏微分方程式論や流体力学の専門書を多数購入した。また、ドイツで開催された「Autumn School and Workshop on Mathematical Fluid Dynamics」やフランスで開催された「VORTICITY, ROTATION AND SYMMETRY (III) - Approaching Limiting Cases of Fluid Flows」などの国際研究集会に参加し、専門家との討論・意見交換を行った。さらに、共同研究者である Sanghyuk Lee 氏(Seoul National University, 韓国)を訪問し、研究討論やセミナーを行った。これらに伴う国内および国外旅費に研究費を使用した。以下では、学術的側面からの研究方法を述べる。

### (1) 異方的微分作用による強い分散性の導出

時間発展作用素の相関数が斉次0次であることから、Littlewood-Paley 分解およびスケール変換により、問題は周波数が円環領域に局在化された場合に帰着される。本研究では更に異方的 Littlewood-Paley 分解によって相関数を非退化部分と退化部分に分解し、異方的微分作用によって退化部分が任意に小さくとれることを示すことで時空積分評価

を証明する 本研究内容は Youngwoo Koh 氏  
および Sanghyuk Lee 氏 (Seoul National  
University, 韓国) との共同研究として研究  
討論を重ねることで研究を行った。

#### (2) 回転 Euler 方程式の長時間可解性

初期速度場の Sobolev 正則性が  $7/2$  より小  
さい場合、爆発判定法による時間局所解の延  
長の議論を直接適用することは出来ない。本  
研究では、Bona-Smith(1975), Kato-Lai  
(1984)による正則化の手法を応用すること  
を考察した。上記の手法を適用するためには、  
滑らかな解に対する先験的評価、および局所  
存在時刻の初期速度場のノルムによる特徴  
付けを確立する必要がある。

#### (3) 成層回転流体に対する分散型評価

まずは成層と回転に対応した線形波の分  
散関係式を導出し、時間発展作用素の具体  
的な表示を与える。更に、時間発展作用素の相  
関数をグラフとする曲面の退化性を解析す  
ることで、線形時間減衰評価および時空積分  
評価を確立する。成層が共存する場合には、  
回転が単独で存在する場合と異なり、周波数  
側での Craya-Herring 基底において時間減衰  
の得られない部分が現れるため、非線形問題  
を解く際にはこの項の影響を考慮する必要  
がある。

### 4. 研究成果

研究目的欄で記述した各問題に対し、得ら  
れた研究成果を以下で述べる。

#### (1) 異方的微分作用による強い分散性の導出

Coriolis 力に対応した線形作用素から生  
成される時間発展群に対し、水平方向および  
鉛直方向に関する微分作用によって時空積  
分評価の成立する許容指数範囲が空間 3 次元  
において最良の範囲まで拡張されることを  
証明した (Youngwoo Koh 氏, Sanghyuk Lee  
氏との共同研究)。

#### (2) 回転 Euler 方程式の長時間可解性

$5/2$  より大きな Sobolev 正則性をもつ初期  
速度場に対して、回転 Euler 方程式の長時間  
可解性を証明した。特に、滑らかな解に対す  
る先験的評価を確立することで、従来の爆発  
判定法による解の延長ではなく、安定性の議  
論による証明方法を与えることに成功した。

#### (3) 成層回転流体に対する分散型評価

温度成層と回転に対応した線形作用素か  
ら生成される時間発展群に対し、最良の線形  
時間減衰評価を導出した。またその応用とし  
て、回転 Boussinesq 方程式の初期値問題に  
対する時間大域的適切性を証明した。初期速  
度場を Craya-Herring 基底によって振動部分  
と準地衡部分に分解し、準地衡部分にスケー

ル不変なノルムでの小ささを課すことで、非  
線形問題の時間大域的適切性を証明した。特  
に、同方程式の時間大域的適切性を保障する  
初期値の振動部分の大きさと浮力周波数の  
大きさに関する十分条件を与えた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に  
は下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Tsukasa Iwabuchi, Ryo Takada,  
*Global well-posedness and  
ill-posedness for the Navier-Stokes  
equations with the Coriolis force in  
function spaces of Besov type*,  
*Journal of Functional Analysis* **267**  
(2014), 1321—1337, 査読有。  
DOI: 10.1016/j.jfa.2014.05.022

Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee, Ryo  
Takada,  
*Dispersive estimates for the  
Navier-Stokes equations in the  
rotational framework*,  
*Advances in Differential Equations* **19**  
(2014), 857—878, 査読有,  
[http://projecteuclid.org/euclid.ade/1404  
230126](http://projecteuclid.org/euclid.ade/1404230126)

Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee, Ryo  
Takada,  
*Strichartz estimates for the Euler  
equations in the rotational framework*,  
*Journal of Differential Equations* **256**  
(2014), 707—744, 査読有,  
DOI: 10.1016/j.jde.2013.09.017

Tsukasa Iwabuchi, Ryo Takada,  
*Global solutions for the Navier-Stokes  
equations in the rotational framework*,  
*Mathematische Annalen* **357** (2013),  
727—741, 査読有,  
DOI: 10.1007/s00208-013-0923-4

[学会発表](計 19 件)

高田 了,  
*Long time existence of classical  
solutions to the 3D rotating Euler  
equations*,  
微分方程式の総合的研究, 2014 年 12 月  
20—21 日, 京都大学(京都市)。

Ryo Takada,  
*Remarks on the Strichartz estimates  
for the rotating incompressible fluids*,  
Autumn School and Workshop on  
Mathematical Fluid Dynamics,

October 27--30, 2014, Bad Boll (Germany).

Ryo Takada,

*Long time solvability for the 3D rotating Euler equations,*

The 10th AIMS conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS83 Fluid flows in unbounded domains, July 7—11, 2014, Madrid (Spain).

Ryo Takada,

*Long time solvability of the 3D incompressible Euler equations with high-speed rotation,*

Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, June 30—July 2, 2014, 京都大学数理解析研究所 (京都市).

Ryo Takada,

*Long time solvability for the 3D rotating Euler equations,*

VORTICITY, ROTATION AND SYMMETRY (III) - Approaching Limiting Cases of Fluid Flows, May 5--9, 2014, Luminy, Marseille (France).

Ryo Takada,

*The 3D rotating Euler equations with the critical Sobolev regularity,*

The 15th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, February 17--18, 2014, 北海道大学 (札幌市).

Ryo Takada,

*Long time existence for the 3D incompressible Euler equations with high-speed rotation,*

Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid, November 25--27, 2013, 京都大学数理解析研究所(京都市).

Ryo Takada,

*Long time existence for the 3D Euler equations with high-speed rotation,*

Analysis Seminar, Seoul National University, May 24, 2013, Seoul (Korea).

[その他]

アウトリーチ活動情報

山形県立楯岡高等学校

「キャリアアップセミナー」講師

(平成26年10月8日)

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

高田 了 (TAKADA, Ryo)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号 : 50713236