

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：12608

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887019

研究課題名(和文) 可解多様体の複素構造の変形理論の研究

研究課題名(英文) Deformation theory of complex structures on solvmanifolds

研究代表者

糟谷 久矢 (Kasuya, Hisashi)

東京工業大学・理工学研究科・助教

研究者番号：80712611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：可解多様体の種々の幾何学的性質と複素構造の変形の関連に関する種々の結果を得た。特に、Hodge分解の変形下での閉性に関する反例を得た。また、局所系Hodge理論に関して種々の結果を得た。これらの結果の多くはケーラー多様体上では起こらないような意外性の大きい結果であった。これらによって、これまであまり注目されてこなかった非ケーラー多様体の幾何学の面白さを強くアピールすることが出来た。

研究成果の概要(英文)：We obtain many results on relations between geometry of solvmanifolds and deformations of complex structures. In particular, we obtain counterexamples for closedness of Hodge decomposition. Moreover, we obtain many results on the Hodge theory of local system cohomology. In view of Kahler geometry, these results are surprising. Non-Kahler geometry had not been studied very much. By these results, we can give interests in Non-Kahler geometry.

研究分野：複素幾何学

キーワード：可解多様体 変形理論 Hodge理論 局所系

1. 研究開始当初の背景

ケーラー多様体の複素構造の変形理論は Kodaira-Spencer の安定性により、すでに多くのことが知られている。一方、ケーラー構造を持たない複素多様体の変形理論についてはあまりよく分かっていなかった。特に複素構造の変形と非ケーラー多様体のホッジ理論との関係に多くの謎があった。またケーラー多様体上では、局所系コホモロジー上でもホッジ理論の研究がおこなわれているが、非ケーラー多様体上ではほとんど研究がされていなかった。

2. 研究の目的

多くの可解多様体はケーラー構造を持たないことが知られている。そこで、ホッジ理論的に良い性質を持つ複素可解多様体を考え、その複素構造の変形による振る舞いを調べることによって、ケーラー構造を持たない複素多様体の複素構造の変形について、より深く理解する。非ケーラー複素多様体上の局所系コホモロジーのホッジ理論について枠組みを与えそれらについて、可解多様体上で調べることによってより深く理解する。

3. 研究の方法

研究代表者のこれまでの研究によって、複素可解多様体のドラムコホモロジー、ドルボコホモロジー更にはポットチャーコホモロジーを計算することができる。その計算方法を用いて、複素可解多様体の倉西空間の明示的な表示や、ホッジ分解の判定を行い、複素可解多様体の変形の振る舞いを研究する。また、Bott-Chern コホモロジーの局所系版を考えて、非ケーラー複素可解多様体の局所系コホモロジーのホッジ分解を定義した。可解多様体は非自明な局所系コホモロジーを計算できることがこれまでの研究代表者の研究によってわかっていたので、それを用いて、非ケーラー複素可解多様体の局所系コホモロジーのホッジ分解の存在を調べる。

4. 研究成果

変形理論において、ある複素幾何学的性質が変形のもとで開安定であるか、閉安定であるかということが最も重要な問題である。ホッジ理論においてはデルデルバー補題の成立という条件が特に強力な性質であることが知られている。この性質は開安定であることが知られているが、閉安定であるかどうかは未解決であった。本研究において、ある複素可解多様体を用いて、デルデルバー補題の成立の閉安定性に対するカウンターエグザンプルを与えることに成功した。また、複素可解多様体が局所系コホモロジーにホッジ分解を持つための条件を与えた。これによって、ケーラー構造を持つ可解多様体の分類に関する定理をより詳細な形に精密

化することができた。

更に本研究は非常に順調に進行したため、複素幾何学の奇数次元版である佐々木幾何学に関して研究を行いその結果を得た。佐々木構造を持つ冪零多様体の構造定理が Cappelletti-Montano -DeNicola-Marrero-Yudin によって証明されているが、それを可解多様体の場合に拡張することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

H. Kasuya, Singularity of the varieties of representations of lattices in solvable Lie groups. Accepted by Journal of Topology and Analysis (2015) 巻号未定 査読あり

<http://www.worldscientific.com/worldscinet/jta>

(In press)

A. Fino, H. Kasuya, Tamed symplectic structures on compact solvmanifolds of completely solvable type Accepted by Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (2015) 巻号未定 査読あり

<http://annaliscienze.sns.it/index.php?page=Home>

(In press)

H. Kasuya, Flat bundles and Hyper-Hodge decomposition on solvmanifolds. Accepted by International Mathematics Research Notices (2015) 巻号未定 査読あり

<http://imrn.oxfordjournals.org/content/early/2014/12/04/imrn.rnu244.refs>

D. Angella, H. Kasuya, Cohomologies of deformations of solvmanifolds and closedness of some properties. Accepted by Accepted by Mathematica Universalis (2015) 巻号未定 査読あり

<http://www.episciences.org/page/epimath>

(In press)

H. Kasuya, The Frolicher spectral sequences of certain solvmanifolds. J. Geom. Anal. 25 (2015), no. 1, 317--328. 査読あり

DOI10.1007/s12220-013-9429-2

A. Fino, H. Kasuya, L Vezzoni, SKT and tamed symplectic structures on solvmanifolds. *Tohoku Math. J. (2)* 67 (2015), no. 1, 19–37. 査読あり
<https://projecteuclid.org/euclid.tmj/1429549577>

D. Angella, H. Kasuya, Hodge theory for twisted differentials. *Complex Manifolds 1* (2014), 64–85. 査読あり
DOI: [10.2478/coma-2014-0005](https://doi.org/10.2478/coma-2014-0005),

H. Kasuya, Examples of non-Kähler solvmanifolds admitting hodge decomposition. *Real and Complex Submanifolds*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106 (2014), 211–227. 査読あり
DOI: [10.1007/978-4-431-55215-4_20](https://doi.org/10.1007/978-4-431-55215-4_20)

H. Kasuya, de Rham and Dolbeault Cohomology of solvmanifolds with local systems. *Math. Res. Lett.* 21, (2014) No. 781–805. 査読あり
<http://www.intlpress.com/site/pub/pages/journals/items/mrl/content/vols/0021/004/a010/>

H. Kasuya, Lefschetz coincidence numbers of solvmanifolds with Mostow conditions. *Arch. Math. (Brno)* 50 (2014), no. 1, 27–37. 査読あり
DOI: [10.5817/AM2014-1-27](https://doi.org/10.5817/AM2014-1-27)

H. Kasuya, Hodge symmetry and decomposition on non-Kähler solvmanifolds. *J. Geom. Phys.* 76 (2014), 61–65. 査読あり
doi: [10.1016/j.geomphys.2013.10.012](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.10.012)

〔学会発表〕(計 12 件)

H. Kasuya Tamed symplectic structures on solvmanifolds
第 20 回複素幾何シンポジウム プチホテル
ゾンタック, 長野県, 信州菅平高原 2014
年 11 月 6 日

H. Kasuya, 代数群のコホモロジーと
Dekimpe-Igodt の驚きのコホモロジー消滅定理
幾何学コロキウム 北海道大学理学部, 北

海道, 札幌 2014 年 10 月 17 日

H. Kasuya Computations of Lefschetz numbers of solvmanifolds and polycyclic groups
Joint Meeting of German and Polish Mathematical Societies thematic session "Topological Fixed Point Theory and Related Topics" Poznan, Poland.
September 19 2014

H. Kasuya Examples of solvmanifolds admitting Hodge decomposition but no Kähler structure
ICM 2014 Satellite Conference on Real & Complex Submanifold (18th International Workshop on Differential Geometry) NIMS, Daejeon, Korea
August 10. 2014

H. Kasuya Hodge decomposition on solvmanifolds.
9th Pacific Rim Conference on Complex Geometry -A satellite conference of ICM2014-, 2014, Ritz-Plaza Hotel, Gunsan, Korea, July 31 2014

H. Kasuya Hodge decomposition of twisted cohomology of complex manifolds
第 4 回南九州代数系集会 複素球商と代数幾何学 熊本大学くすの木会館レセプションホール, 熊本県, 熊本市 2014 年 7 月 23 日

H. Kasuya Hodge theory on solvmanifolds.
Workshop "Complex Geometry and Lie Groups" Torino, Italy, June 17. 2014

H. Kasuya Central theorems for cohomologies of certain solvable groups. *Discrete Groups and Geometric Structures, with Applications V*, Leuven (Heverlee), Belgium June 3. 2014.

H. Kasuya Nomizu, Hattori, Mostow の定理の発展
RIMS 研究集会 変換群の位相幾何と代数構造 2014 年 5 月 27 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府, 京都市

H. Kasuya Differential Gerstenhaber algebras and generalized deformations of solvmanifolds

Progress of geometric structures on manifolds 名城大学理工学部, 愛知県名古屋市 2014 年 3 月 5 日

H.Kasuya Central theorems for cohomologies of certain solvable groups

第 9 回代数・解析・幾何学セミナー 鹿児島大学理学部, 鹿児島県, 鹿児島市 2014 年 2 月 19 日

H.Kasuya Cohomologies of deformations of solvmanifolds and closedness of some properties

第 19 回複素幾何シンポジウム プチホテルゾントック, 長野県, 信州菅平高原 2013 年 11 月 1 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.titech.ac.jp/~kasuya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

糟谷 久矢 (KASUYA Hisashi)

東京工業大学大学院理工学研究科, 助教

研究者番号: 80712611

(2) 研究分担者

本研究は研究代表者が単独で行った。

(3) 連携研究者

本研究は研究代表者が単独で行った。