様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2013～2014
課題番号：２５８８７０３１

研究課題名（和文）Jiang-Su 環の群作用の分類とその応用

研究課題名（英文）Classification of actions on the Jiang-Su algebras and their applications

研究代表者
佐藤　康彦（Sato, Yasuhiko）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・助教

研究者番号：７０５８１５０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）： 本研究では以下の結果を得る事に成功した。(i)端的トレース空間が有限次元な場合のToms-Winter予想に関する肯定解、(ii)初等的従順群に対するRosenberg予想の肯定解、(iii)Powers-Sakai予想の完全解。

研究の初期段階ではJiang-Su環と呼ばれる中心的な対象のみ研究する予定であったが、予想に反し分類理論全般にわたる問題に満足な解を得た(i)。また、力学系の応用として(ii)の予想に部分的な解を得た。(iii)では本研究の応用として、Powers-Sakai予想に対する反例を得た。この予想は、UHF環と呼ばれる作用素環の力学系が物理的な理論を示唆するものであった。

研究成果の概要（英文）： In this study, the following theorems are established. (i) affirmative answer for the Toms-Winter conjecture in the case that the extreme trace space has finite topological covering dimension, (ii) affirmative answer of the Rosenberg conjecture for all elementary amenable groups, (iii) the solution of the Powers-Sakai conjecture.

On the first stage of this study, although we aimed at a result just for the Jiang-Su algebra which plays a central role in the classification of operator algebras, we have success in a consequence of (i) which is a well known open problem concerns with the whole class of classifiable operator algebras. As an application of dynamical systems of this study, we also obtained a partial answer (ii) to the famous open problem. In (iii), a counter-example to the Powers-Sakai conjecture is constructed as the second application. This conjecture indicated the possibility that a physical theory occurs on any dynamical system on any uniformly hyperfinite algebra.

研究分野： 作用素環論

キーワード： C* 環　力学系　Jiang-Su 環　分類理論　Toms-Winter 予想　Rosenberg 予想　Powers-Sakai 予想

１．研究開始当初の背景

(1) ab=ba が成立しない非可換性を表す数学の一つとして、作用素環と呼ばれる分野がある。作用素環の中でも、特に C* 環と呼ばれる数学的対象が盛んに研究される中、G. Elliott により全ての従順 C* 環が K 群という比較的扱い易い不変量で分類できる事が予想されていた。C* 環が非可換な演算であるのに対し、この K 群は可換な群として知られている。そのため、予想が正しいと従順な C* 環を簡単に扱う事が出来る様になる。この予想は多くの研究者の注目を集め、たくさんの肯定的な部分解が与えられていた[2]。

しかし近年になり、この予想に対する反例が上げられて以降は、研究の方向が分類可能か不可能かの境目を与える目的へと転じていった。現在では、可換な群で分類できない、ある種の病的な C*環 を取り除く条件が要請されている。こういった背景を元に、分類可能な C*環を特徴づける目的で、A. Toms と W. Winter は分類可能性を特徴付ける３つの性質が同値であると予想した。

その予想された分類可能性の条件の一つが Jiang-Su 環と呼ばれる環の吸収性である。大雑把に述べると Jiang-Su 環を Z と表したとき Z がごく自然に A の中に含まれるならば A が分類可能となる事が知られている。Toms-Winter 予想ではこの Jiang-Su 環の吸収性が他のよく知られた条件と同値であると予想されていた[3]。

(2) C* 環の分類理論に付随し、その上の力学系の研究も盛んに行われている。基本的には物理的な時間発展を表すためのモデルとして研究されているが、逆に力学系自身の研究が作用素環の分類問題に深い影響を与える事がある。古くは A. Connes による無限巡回群作用の分類に始まり、歴史的にみて群作用の技術が作用素環の分類に大きな成果を与える事がしばしば起こっていた[1]。

現在では作用素環上の力学系を分類する手法がある程度確立し、ある正規性の元で全ての従順群作用が分類可能であると考えられている。特に、分類理論で中心的な役割を果たす Jiang-Su 環と呼ばれる環については、この上の全ての従順群作用が外部的という条件下で分類可能である事が予想された。これらの事を踏まえ、私は以前行っていた Jiang-Su 環の群作用の研究を Toms-Winter 予想を解く本質的な手法へと応用した。

２．研究の目的

分類定理で重要な Jiang- Su 環に対し、この上の離散従順群作用の分類を目標とする。更に、力学系で得られた研究の応用として、他の分類可能な安定有限 C* 環に対しても従順群作用を考察し、環自身の分類理論同様、K 群による不変量で分類を与える。

(2)また、群作用からは標準的に接合積と呼ばれる別の C* 環の構成方法が知られている。Jiang-Su 環の従順群による作用の応用として、この構成方法から分類不可能と思われていた環に対する理論を与える。具体的には、K-群により分類できない Villadsen 環等をこの接合積の立場から考察し、力学系に由来した不変量を発見する事が目的である。

得られた力学系の研究を応用し、他の群作用に関する問題解決を試みる。具体的には実数群 R の作用に関する、Powers-Sakai 予想、従順群全般の有限表現の可能性をあらわした Rosenberg 予想 など作用素環の力学系に関する問題解決を目的とする。

３．研究の方法

(1) 分類可能な C* 環の中で主要な役割を果たす Jiang-Su 環について、この上の従順群作用の分類を目指す。また、Jiang-Su 環の従順群作用に関する結果を、更に広い C* 環のクラスへ応用する。これらの目標を達成するためには、「一般の従順群」と「より広い C* 環のクラス」に見識を深める必要がある。現在、「従順群作用」の研究については、泉、岸本、松井氏らをはじめとする日本の研究者が世界的に最先端の技術を持つ。研究計画の一つとして、私はこのアドバンテージを有効に活かし、国内の研究集会で彼らと情報交換する事を計画した。特に Jiang-Su 環の群作用については他の環では現れない「射影が無い」という障害があった。私は過去にこの条件をよく研究し、本質的な技術を得ていた。この技術を力学系へ応用するという視点から、力学系の研究に進展を与えた。

(2) 群作用の技術をより広いクラスへ応用する。この目的のため、他国の研究者が持つ技術を習得する必要があった。特に興味深い C* 環の構成方法が M. Rordam, A. Toms, J. Villadsen らにより与えられていた。彼らの所属するデンマーク、アメリカの研究チームと研究集会などで直接議論を交わし、本研究に有益な情報を得る事を考えた。特に Rordam 氏から誘いを受け、氏の所属するコペンハーゲン大学に 9 ヵ月間の長期滞在を行い、従順群作用に関する共同研究を行った。

４．研究成果

得られた研究成果は主に以下の 3 件である。
(1)端点トレース空間が有限次元の場合における Toms-Winter 予想の肯定的解決。
(2)初等的従順群に対する Rosenberg 予想の肯定解。(3)Powers-Sakai 予想の完全解決。

(1)は A. Toms, W. Winter が提出した分類可能な作用素環の特徴付けに関する予想で、現在 C*環の分類理論で最も重要な問題の一つである。元々、松井宏樹氏との共同研究においては「トレースの無い場合」もしくは「トレースを唯一つ持ち、かつ 疑似対角化可能(QD)」という条件の元でこの予想に対する肯定的な解を得ていた。この研究を更に発展させ、25 年度には S. White, W.Winter 氏らとの共同研究で QD の条件を取り除く事に成功した。

更に 26 年度の研究では J. Bosa, N. Brown, A. Tikuisis, S. White, W. Winter 氏らと共同研究を行い、この結果を「端点トレース空間が有限次元コンパクト空間」という条件まで拡張する事ができた。この拡張は、「一点」からなる標準的な空間で考えられていた以前の分類定理を有限次元なコンパクト空間全てに拡張するという大きなもので、現状考えられている分類可能な作用素環をほぼ覆い尽くす結果と言える。

上記の共同研究者らと議論を行う目的も兼ねて、下記の研究集会へ参加、発表を行い本研究に関する有益な考察を得る事ができた。Bosa, White 氏の所属する Glasgow 大学における研究集会 「Classification, Structure, Amenability and Regularity」、Copenhagen 大学の 「Operator algebras Seminar 」、 Fields 研究所における「 Workshop for C*-algebras and Dynamical systems」、Banff BIRS における「Dynamics and C*-Algebras: Amenability and Soficity」があげられる。また、韓国で開かれた ICM Satellite Conference on Operator Algebras and Applications では Plenary Speaker として本研究の講演を行った。

White, Winter 氏との研究成果は数学雑誌「Invent. Math.」に掲載が決定し、6 人の共同研究については数学原稿を扱うサイト Arxiv において公表を行った。

(2)について、現在の分類理論では、疑似対角化可能(QD)と呼ばれる性質が注目を集め、本質な役割を果たす事が解っている。この QD について、1980 年代に J. Rosenberg は従順群から作られる作用素環は必ず QD であると予想した[5]。この問題は長い間、未解決問題として知られていたが、この方向性でまとまった結果は特に得られていなかった。これは、従順群の力学系に対する研究が限られた群にのみ発展していた事に由来し、従順群全体を扱う Rosenberg の問題に手が届かなかった事が要因であると考えられる。

ところで、従順群の全体からなるクラスは良い性質を持ち、自然な群同士の演算で閉じている事が知られている。従順群からスタートして、部分群、商群、拡大群、帰納的極限などの初等的な操作で出来上がる群は再び従順なものとなる。初等的従順群とは有限群や可換群からスタートし、これら 4 つの操作で閉じた群のクラスを指す。構成から初等的従順群は従順群だが、逆は 1980 年代に R. Grigorchuk によって反例が与えられるまで有名な未解決問題として知られていた。

一方、従順群の力学系を扱う事に主眼がおかれた本研究では、すでに分類理論の応用を手掛かりに初等的従順群を扱う技術が得られていた。私はこの技術を元に小沢、M. Rordam 両氏らと共に初等的従順群についてこの予想が正しいことを証明した。

定理の証明では、(1)で得られた分類理論を技巧的に応用している。また、「研究目的」で上げた力学系から得られる「接合積」が議論の中で本質的な役割を果たし、研究標題にある Jiang-Su 環上の力学系の応用を表しているといえる。

(3) 1975 年に R. Powers と境氏は UHF 環とよばれる作用素環に対し、実数体 R による任意の群作用が漸近的内部 (approxi –mately inner) である事を予想した。この予想は物理系で現れる時間発展が必ず漸近的内部であるという考察から動機づけられたもので、UHF 環という基本的な環の任意の時間発展がある物理系を表す事を示唆している [4]。また、ここで現れる UHF 環とは研究目的の Jiang-Su 環を構成する前段階にあたる環で、この間の群作用の研究は直接 Jiang-Su 環自身へ応用が期待できた。

この予想は長く作用素環の群作用に関する有名な未解決問題として知られ、岸本氏によって、AF 環に対する反例が与えられていたが、元の UHF 環に対しては未解決であった。松井宏樹氏との共著論文において、我々は最新の分類理論を応用して、この問題の完全解決に至った。これは「26 年度の研究計画」で上げていた実数群 R 作用の研究について、非常に顕著な結果といえる。

引用文献

[1] A. Connes. Classification of injective factors. Cases II1, II1, III, Ann. of Math.(2) 104 (1976), no. 1, 73-115.
[2] G. A. Elliott, On the classification of C*-algebras of real rank zero, J. Reine Angew. Math. 443 (1993), 179-219.
[3] W. Winter and J. Zacharias. The nuclear dimension of C*-algebras. Adv. Math., 224(2): 461-498, 2010.
[4] R. T. Powers and S. Sakai, Existence of ground states and KMS states for approximately inner dynamics, Comm. Math. Phys. 39 (1975), 273-288.
[5] Hadwin, D., Strongly quasidiagonal

C*-algebras. With an appendix by Jonathan Rosenberg. J. Operator Theory 18 (1987), no. 1, 3-18.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　5　件）

① Hiroki Matui, Yasuhiko Sato, Z-stability of crossed products by strongly outer actions II, American Journal of Mathematics, 136 (2014), 1441-1497.

② Hiroki Matui, Yasuhiko Sato, Decomposition rank of UHF-absorbing C*-algebras, Duke Math. J. 163 (2014), No. 14, 2687-2708.

③ Y. Sato, S. White, W. Winter, Nuclear dimension and Z-stability, to appear in Invent. Math.

④ N. Ozawa, M. Rørdam, Y. Sato, Elementary amenable groups are quasidi -agonal, Geom. Funct. Anal. Vol. 25 (2015), 307-316.

⑤ J. Bosa, N. P. Brown, Y. Sato, A. Tikuisis, S. White, W. Winter, Covering dimension of C*-algebras and the classification of maps by traces, Preprint, http://homepages.abdn.ac.uk/ a.tikuisis/pages

〔学会発表〕（計 19 件）うち招待講演 12 件

①Yasuhiko Sato
Murray-von Neumann equivalence for positive elements and order zero c.p. maps, Operator Algebra Seminar, 2014/04/23, Copenhagen University (Denmark)

②Yasuhiko Sato
Murray-von Neumann equivalence for positive elements and order zero c.p. maps, 2014 Operator Algebras Spring Program, 2014/04/14, East China Normal University, Shanghai (China),

③Yasuhiko Sato
Murray-von Neumann equivalence for positive elements and order zero c.p. maps, Scottish Operator Algebras Seminar, 2014/03/14, University of Glasgow, (UK),

④佐藤　康彦
Approximately unitarily equivalent automorphisms of UHF absorbing C*-algebras, 日本数学会　秋季分科会, 2014/09/26, 愛媛大学

⑤Yasuhiko Sato
Approximately unitarily equivalent mor -phisms of UHF absorbing C*-algebras, Classifying Structures for Operator Algebras and Dynamical Systems, 2013/09/18, Aberystwhyth University, (UK)

⑥佐藤　康彦
Approximately unitarily equivalent mor -phisms of UHF absorbing C*-algebras, RIMS 研究集会, 2013/09/12, RIMS 京都

⑦Yasuhiko Sato,
Murray von Neumann equivalence for positive elements and order zero c.p. maps, Operator Algebra Spring Program, 2014/04/11, East China Normal University, Shanghai (China),

⑧Yasuhiko Sato,
Murray von Neumann equivalence for positive elements and order zero c.p. maps, Operator Algebra Spring Program 2014/04/23, University of Copenhagen (Denmark)

⑨Yasuhiko Sato,
Elementary amenable groups are quasi –diagonal, The 8th Oresund symposium on non-commutative analysis and non-commutative geometry, 2014/05/14, Lund University (Sweden)

⑩Yasuhiko Sato
Elementary amenable groups are quasi -diagonal, C*-Algebras and Dynamical Systems, Courses Workshops, 2014/06/16, Fields Institute, (Canada).

⑪Yasuhiko Sato
Classification theorems for amenable C*-algebras and Connes' fundamental work for injective factors, ICM Satellite Conference on Operator Algebras and Applications, 2014/08/08, Cheongpung (Korea)

⑫Yasuhiko Sato
Elementary amenable groups are quasi -diagonal, Classification, Structure, Amenability and Regularity, 2014/09/05, Glasgow University (UK)

⑬佐藤　康彦
Elementary amenable groups are quasi -diagonal, 作用素環論の最近の進展, RIMS 研究集会 2014/09/08, RIMS, 京都

⑭佐藤　康彦

C*環の分類理論と Toms-Winter 予想, 2014 年度日本数学会、秋季分科会、特別講演、2014/09/27, 広島大学

⑮Yasuhiko Sato
Elementary amenable groups are quasi diagonal, Dynamics and C*-Algebras: Amenability and Soficity, 2014/10/21, Banff International Research Station (Canada)

⑯佐藤　康彦
Classification of order zero c.p. maps by traces, 関西作用素環セミナー, 2014/11/29, 白浜町中央公民館,

⑰佐藤　康彦
Jiang-Su 環を中心とする最近の分類定理, 作用素環の分類理論とその周辺, RIMS 研究集会（連続講演), 2015/02/02~04, RIMS 京都

⑱Yasuhiko Sato
Classification of order zero c.p. maps by traces, Operator Algebra Seminar, 2015/03/12, Purdue University (USA).

⑲Yasuhiko Sato
Classification of order zero c.p. maps by traces, Operator Algebras Spring Program, 2015/03/24, East China Normal University, Shanhhai (China)

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　康彦　（SATO, Yasuhiko　）
京都大学，大学院理学研究科　・助教

研究者番号：　70581502