様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2013～2014
課題番号：２５８８７０３８

研究課題名（和文）フラクタル上の測度論的リーマン構造に対する幾何学・解析学の展開

研究課題名（英文）Developments of geometry and analysis for measurable Riemannian structures on fractals

研究代表者
梶野　直孝（KAJINO, Naotaka）

神戸大学・理学（系）研究科（研究院）・助教

研究者番号：９０７００３５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではフラクタル上のLaplacianの固有値（固有振動数）の分布の漸近挙動について研究を行い次を示した：
固有値漸近挙動の作用素論的言い換えとして体積の概念を特徴付けるConnesのトレース定理が，Sierpinski gasket上の測度論的Riemann構造の場合を含む広範なフラクタル上のLaplacianに対して成り立ち，さらに曲面積も類似の方法で特徴付けることができる．
またApollonian gasketという古典的なフラクタル上の測度論的Riemann構造について，Laplacianの自己共役性，Laplacianの固有値分布の離散性，最小固有値の評価等の基本的事実を証明した．

研究成果の概要（英文）：In this research the author has studied asymptotic behavior of the distributions of the eigenvalues of Laplacians (the eigenfrequencies) on fractals and has proved the following assertions:
Connes' trace theorem, which characterizes the notion of volume as an operator-theoretic paraphrase of eigenvalue asymptotics, holds for a large class of Laplacians on fractals including the case of the measurable Riemannian structure on the Sierpinski gasket, and surface area can be also characterized in a similar manner.
Moreover, for the measurable Riemannian structure on a classical fractal called the Apollonian gasket, the author has proved several fundamental facts such as the self-adjointness of the associated Laplacian, the discreteness of the eigenvalue distribution of the Laplacian, and estimates of the smallest eigenvalue.

研究分野：フラクタル及び測度距離空間上の解析学

キーワード：フラクタル解析　ディリクレ形式　ラプラシアン　固有値漸近挙動　コンヌのトレース定理　測度論的リーマン構造　アポロニウスの詰め込み

１．研究開始当初の背景

(1)基本的な物理現象としての熱や波動の伝播を表す微分方程式である熱方程式や波動方程式においては，空間変数についての微分に Laplacian と呼ばれる微分作用素が自然に現れることがよく知られている．滑らかな曲面（や，その一般化である Riemann 多様体）においては Laplacian は具体的な偏微分作用素として与えられるが，自己相似フラクタルにおいては 1 点のどんなに小さな近傍も全空間と同等の複雑さを有するため素朴な微分の概念が機能せず，Laplacian をどう定義すべきかは非自明な問題である．1980 年代後半～90 年代前半にかけての著しい研究の進展により，典型的な自己相似フラクタルに対しては Laplacian を数学的に厳密に定義することができ，さらにその固有値（フラクタルを振動膜とみなしたときの固有振動数）や熱方程式の解の挙動は滑らかな Riemann 多様体の場合と質的に異なることが明らかにされた．

(2)一方で楠岡(1989, 1993)，木上(1993, 2008)，梶野(2012)らの研究により，Sierpinski gasket というフラクタルに対しては平面への「調和な埋め込み」を考えることで Riemann 多様体の構造の類似物である「測度論的 Riemann 構造」を導入でき，このとき対応する Laplacian や熱方程式が Riemann 多様体の場合と同様の解析的性質を持つようになることが知られている．この結果はフラクタルという「特異な」空間においても「多様体的な」解析学が展開できる可能性を示唆する興味深いものであるが，その研究手法は Sierpinski gasket の特殊性に大きく依存しており，他のフラクタルへの一般化は容易でない．

２．研究の目的

(1)本研究は，Sierpinski gasket だけに限られていた測度論的 Riemann 構造の枠組みとその解析の更なる深化および他のフラクタルへの一般化を目的とするものである．

(2)他のフラクタルへの一般化としては，Sierpinski gasket の高次元版・多段版や多角形版（Sierpinski gasket は 2 次元 2 段の 3 角形の場合である）等の典型的な自己相似フラクタルの場合を主な対象に，測度論的 Riemann 構造の導入が可能であることの証明，および対応する Laplacian や熱方程式の解析を目標とする．

(3)Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造に関しては Lapidus-Sarhad (2014, preprint は 2012 年発表)において，微分作用素の作用素論的性質に基づく幾何学の展開を目標とする非可換幾何学の観点から，基本的な微分作用素である Dirac 作用素の構成をはじめとする幾つかの結果が示され，また Connes のトレース定理に相当する主張の成立が予想された．そこで測度論的 Riemann 構造，特に Sierpinski gasket の場合について，Laplacian や Dirac 作用素に対して Connes のトレース定理に相当する結果を得ることを目標とする．

(4)Sierpinski gasket と位相同形な，古くからよく知られているフラクタルとして，平面内の円弧からなる「3 角形」（の内部と周の和集合）から内接円の内部を取り除くことを無限に繰り返すことで得られるアポロニウスの詰め込み(Apollonian gasket)がある．アポロニウスの詰め込みは，Sierpinski gasket 上のあるエネルギー形式（Dirichlet 形式；先述の測度論的 Riemann 構造を与えるものとは全く異なる）に関する調和埋め込みとみなせることが Teplyaev(2004)により示されており，従ってこの埋め込みにより自然な測度論的 Riemann 構造を導入することができる．しかしこのエネルギー形式については計算可能な具体的な形が知られておらず，Laplacian や熱方程式の基本的な性質は全く研究がなされていなかった．そこでこの場合について Laplacian の自己共役性（エネルギー形式の，2 乗可積分関数の空間の上の内積としての完備性）の証明や固有値の漸近挙動の解明を目標とする．（なおこのアポロニウスの詰め込みについては，本研究課題への応募時点では実現可能性が薄いと考え応募書類では言及しなかったが，最近になって具体的な計算の見通しが立ったことや，数学の他分野との密接な関連が見込まれるなど発展性や重要性が極めて高いと思われることから，本研究課題の一部として研究を実施することにした．測度論的 Riemann 構造の研究という本研究課題の主旨に合致していることには疑問の余地はないと考えている．）

３．研究の方法

(1)①測度論的 Riemann 構造の他のフラクタルへの一般化に関しては，測度論的 Riemann 構造の枠組みの数学的正当化のためには「調和埋め込み」の座標関数のエネルギーがどの点の近傍でも非退化であることの証明が必要であり，それを目指す．具体的には，与えられた自己相似フラクタルの任意の点に対しその点の近傍で非定数であるような調和関数が存在することを示せばよい．これは Sierpinski gasket の高次元版・多段版の場合には直接計算により容易に分かる性質であるが，Sierpinski gasket の多角形版である polygasket の場合には自明でない．Polygasket のうち 6 角形・9 角形から作られる hexagasket・nonagasket については調和関数の値を注意深く計算することにより既に証明ができていたので，同じ方法を他の polygasket の場合に適用することを試みる．

②上記①に引き続いて，Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造に対する既知の研究，例えば木上(2008)による熱方程式の基本解（熱核）の Gauss 型評価や筆者の（未出版の）結果である Laplacian の固有値の漸近挙動，等に対応する結果を他のフラクタルで

も得ることを目指す．固有値の漸近挙動については木上-Lapidus(1993)や筆者の結果で使われた，固有値の累積密度関数をスケール変換して自己相似性を用いることにより，確率論においてよく知られた極限定理である更新定理(Feller (1971), Kesten (1974))を適用できる形に持ち込む議論の適用を試みる．熱核の性質については，梶野(2012)の手法を適用することで Sierpinski gasket の場合と同様の１次元的な局所挙動が証明できないか検討する．
(2)測度論的 Riemann 構造に対する Connes のトレース定理の証明のために，まず定理の定式化に使われる Dixmier トレース（作用素からなるある線型空間上の正値線型汎関数）について基本的な事実を精査する．Connes のトレース定理は, Riemann 多様体上の微分作用素に対する主張としては古典的だが，その証明としてよく知られているのは多様体上の（擬）微分作用素の性質を用いるものであり，フラクタルのような特異空間の枠組みにそのまま一般化できるものでは全くない．しかし定理の意味を考えれば Connes のトレース定理は Laplacian の固有値の漸近挙動の作用素論的言い換えとみなすことができ，すると後者についての知識から前者を直接導くことが可能と期待するのは自然である．そこで筆者による Sierpinski gasket 上の測度論的Riemann構造での結果をはじめとする，フラクタル上の Laplacian の既知の固有値の漸近挙動を，Connes のトレース定理に直接結びつけられないか検討する．
(3)アポロニウスの詰め込みについては，まず Teplyaev (2004)の与えたエネルギー形式の具体的な形を計算することを試みる．その際，アポロニウスの詰め込みの構成段階で順次現れる内接円の半径の逆数は最初の３つの円弧の半径の逆数からなるベクトルにある整数成分の行列を繰り返し掛けることで得られる，という古典的な事実に注意しながら計算を行う．その後，そのエネルギー形式の完備性・正則性や Laplacian の最小固有値の評価等を，熊谷(1993)，木上(2001)による自己相似フラクタル上の自己相似エネルギー形式の場合の手法を適用することで証明できないか検討する．可能であればさらに Laplacian の固有値の漸近挙動を，筆者が Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造の場合に用いた, Kesten (1974)の更新定理を適用する議論を当てはめることで証明できないか試みる．

４．研究成果

(1)本研究課題における主な研究成果は，Connes のトレース定理に相当する主張を（Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造の場合を含む）広範なフラクタル上の Laplacian に対して示したこと，および発展問題として Connes のトレース定理の「表面積」版を定式化し，Euclid 空間内の滑らかな曲面の場合や自己相似フラクタルの自己相似部分集合の場合にその成立を示したことである．（なお当該結果を述べた論文は執筆のための時間の確保に苦慮しており，残念ながら未完成である．）
①1 つ目の結果は「一般にエネルギー形式（Dirichlet 形式）に対応するような自己共役作用素が，フラクタル上の Laplacian の場合と同様の型の固有値の漸近挙動を満たす場合には，自己共役作用素の適切なベキに関数による掛け算作用素を合成した作用素の Dixmier トレースの値が関数の体積積分として与えられる」と述べられる．（ここでの自己共役作用素が Riemann 多様体上の Laplacian（や楕円型擬微分作用素）の場合が古典的な Connes のトレース定理である．）この結果は本質的な仮定が Laplacian の固有値の漸近挙動に関する部分のみであることから適用対象が広く，自己相似フラクタル上の自己相似な Laplacian, Sierpinski gasket 上の測度論的 Riemann 構造の他，ランダム再帰 Sierpinski gasket や Brown 連続体樹木などの再帰的な確率法則により構成されるランダムフラクタルの上の Laplacian に対しても適用できる．このうち有限分岐的（有限集合の除去により不連結になるような）自己相似フラクタル上の自己相似な Laplacian に対しては，かなり強い追加の条件の下で同様の結果が成り立つことが木上-Lapidus (2001)において既に示されていたが，そこでの追加の条件は実は一切不要であることが我々の結果から容易に従う．この意味で，我々の結果はフラクタル上の Laplacian に対する既存の研究結果の広範な一般化になっていると言うことができる．実は定理の定式化さえできてしまえば証明は難しいものではなく，その意味で定理自体にはさほどの深みはないものの，フラクタル上の Laplacian の多くの実例に適用可能な形の定式化を与えていることがこの定理の重要な点である．また，この結果は Connes のトレース定理の主張（Dixmier トレースの値が体積測度による積分として求められる）が Laplacian の固有値の漸近挙動の直接の帰結として導けることを明らかにしており，作用素論の観点からも興味深い結果であると思われる．
②上述したように，Connes のトレース定理は空間上の体積測度による積分の概念の作用素論的言い換えを与える定理であるが，これは Laplacian の固有値の漸近挙動の主要部に空間の「体積」に比例した項が現れることの帰結である（上記①の結果における仮定も，より正確にはそのような形で述べられる）．一方，Laplacian の固有値の漸近挙動に関しては膨大な研究がなされており，漸近挙動の主要部を引いた剰余項についても多くの場合に詳細な漸近挙動が得られている．Euclid 空間の滑らかな（より一般には Lipschitz）境界を持つ領域や境界付き多様体上の Laplacian の場合には，剰余項の漸近

挙動には境界の曲面積に比例する項が現れることが例えばBrown (1993)等により示されており，また類似の結果は自己相似フラクタル上の自己相似Laplacianに対しても，自己相似な部分集合上でDirichlet境界条件を課した場合について梶野(2014)で得られている．そこで上記①の結果の発展として，「境界上の曲面積による積分」の概念を，Connesのトレース定理の場合と同様に作用素のDixmier トレースを考えることで作用素論的に復元できるか，という問題が考えられる．これについて筆者は，「与えられた境界集合上でDirichlet境界条件を課したLaplacianと課さないLaplacianのそれぞれを境界集合の次元に応じてベキ乗し，両者の差を取ったものに関数による掛け算作用素を合成した作用素を考えると，そのDixmierトレースの値が関数の境界上での曲面積による積分で与えられる」という主張を，Laplacian の固有値の高次の漸近挙動と熱核の挙動に対する一定の仮定の下で証明した．この結果は特に上で言及した，Euclid空間上のLaplacianで境界集合としてLipschitz曲面を取った場合に適用することができ，この場合境界上での積分は曲面の面要素による通常の面積分の定数倍に一致する．これは境界上での面積分の概念の作用素論的特徴付けを与えた結果として初めてのものと思われ，その点で意義深いものであると考えている．証明には熱核の評価を援用しての熱半群（を境界条件の異なるLaplacian毎に考え差を取ったもの）のトレースの精密な評価が必要であり，境界条件の熱核評価への影響について筆者がこれまでの研究で培ってきた知見が大いに役立った．残念ながらこの結果をフラクタル上の測度論的Riemann構造の場合に適用できることは証明できておらずそれは今後の課題であるが，予想される結論としては例えばSierpinski gasket で境界集合として側面の曲線を取った場合に上記の結果が適用でき，境界上での積分として曲線の線要素（長さ）による積分が現れることが期待される．

(2)アポロニウスの詰め込みに対し Teplyaev (2004)により与えられたエネルギー形式について，まずその具体的な形を求めることに成功した．具体的には，空間の離散近似の段階ではこのエネルギー形式は詰め込みの各部分を構成する円の半径（の逆数）のごく簡単な有理式を抵抗値に持つ重み付きグラフとして与えられることが分かった．極限の詰め込み上のエネルギー形式はその自然な単調極限として定義されるため，詰め込みの各部分における調和関数のエネルギーの値等がある程度具体的に計算可能になったことになる．そこでさらに解析を推し進め，このエネルギー形式の完備性・正則性，およびLaplacian の最小固有値が詰め込みの外接円半径の逆数の2乗と比較可能であるという結果を，熊谷(1993)，木上(2001)の手法を修正して用いることにより証明した．現在，Kesten (1974)の更新定理を適用してLaplacian の固有値の漸近挙動を証明できないか検討中である．アポロニウスの詰め込みはある Klein 群（3次元双曲空間の向きを保つ等長変換のなす群の不連続部分群）の極限集合になっているため，この例はフラクタル上の測度論的Riemann構造の理論とKlein群論との接点であり，より一般のKlein群の極限集合に対して類似の解析学が展開できる可能性を示唆していて重要である．またアポロニウスの詰め込み（をはじめとする Klein 群の極限集合）に対しては近年 Hee Oh らにより極限集合を構成する円の半径の分布の漸近挙動解析をはじめとしてKlein群論や力学系の観点から極めて深い研究が行われており，Kestenの更新定理の力学系・エルゴード理論的側面に鑑みるに現在進行中のLaplacian の固有値の漸近挙動の研究にもKlein 群論的観点は重要であることが大いに期待される．今後はアポロニウスの詰め込みを主な対象としてさらに解析を深め，フラクタル上の測度論的Riemann構造とKlein群論とのつながりを見出せるよう努力する所存である．

(3)なお，主たる研究課題の 1 つとして当初考えていた，Sierpinski gasket 以外の自己相似フラクタルにおける測度論的Riemann構造の解析の話題については，はっきりとした研究成果を得ることが残念ながらできなかった．Polygasketにおいて測度論的Riemann構造の導入が可能であるとの感触を5角形から作られるpentagasketの場合の計算から得られていたり，少なくともhexagasket（6角形）とnonagasket（9角形）の場合にはFellerの更新定理を適用してLaplacianの固有値の漸近挙動を得ることが可能らしいとの感触は得られているので，この方向性を推し進め証明を完成させることを近い将来の課題として念頭に置いている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　4　件）

①N. Kajino,
``Spectral volume and surface measures via the Dixmier trace for local symmetric Dirichlet spaces with Weyl type eigenvalue asymptotics",
International Workshop: ``Workshop on Dirichlet Forms & Stochastic Analysis 2014",
2014年10月26日，Dresden（ドイツ）.

②N. Kajino,
``Spectral volume and surface measures via the Dixmier trace for local Dirichlet

spaces with Weyl type eigenvalue asymptotics",
``Seminars with E. Milman", 2014年9月29日，京都大学理学部（京都府京都市）.

③N. Kajino,
``Spectral volume and surface measures via the Dixmier trace for local Dirichlet spaces with Weyl type eigenvalue asymptotics",
International Conference: ``Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics",
2014年8月26日，関西大学（大阪府吹田市）.

④N. Kajino,
``Spectral volume measure via the Dixmier trace for Dirichlet spaces with Weyl type eigenvalue asymptotics",
International Conference: ``Fractal Geometry and Stochastics V",
2014年3月25日，Tabarz（ドイツ）.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
研究代表者のホームページ（論文のプレプリントがダウンロードできる）：
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/nkajino/

６．研究組織
(1)研究代表者
梶野　直孝（KAJINO，Naotaka）
神戸大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：90700352