

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 6 日現在

機関番号：15201

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887044

研究課題名(和文)2重調和部分多様体の分類問題の研究

研究課題名(英文)Classification problems of biharmonic submanifolds

研究代表者

前田 瞬 (Maeta, Shun)

島根大学・総合理工学研究科(研究院)・講師

研究者番号：00709644

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：完備リーマン多様体から非正曲率を持つリーマン多様体への $k$ 重調和写像を研究した。そして、次の結果を得た。

2重調和写像は調和であることをある積分条件の元に示した。また、この手法を $k$ 重調和写像へ応用した。浦川教授、中内教授との共同研究により、有限な4エネルギーと有限なテンション場の $L^4$ ノルムを持つ3重調和等長はめ込みが調和となることを示した。これらの結果は大域版一般化されたChen予想の肯定的部分的解決である。

研究成果の概要(英文)：We studied polyharmonic maps of order  $k$  from a complete Riemannian manifold into a non-positively curved manifold. We got the following results.

We showed that biharmonic maps are harmonic under an integral condition. We applied this method into polyharmonic maps of order  $k$ . As a joint work with Prof. Urakawa and Prof. Nakauchi, we showed that triharmonic isometric immersion which have finite the 4-energy and finite the  $L^4$ -norm of the tension field are harmonic. These results give affirmative partial answers to the global version of generalized Chen's conjecture.

研究分野：微分幾何学

キーワード：2重調和部分多様体 2重調和写像 調和写像 極小部分多様体  $k$ 重調和写像 Chen予想 完備リーマン多様体

## 1. 研究開始当初の背景

J. Eells と J. H. Sampson は幾何学の自然かつ中心的な理論である調和写像の一般化となる  $k$  重調和写像の概念を導入した。  $k$  が 2 のときに特に研究が行われている。 その中でも最も興味深かつこの分野を牽引している問題に 1988 年頃 B. Y. Chen により提起された Chen 予想、すなわち、「ユークリッド空間内の 2 重調和部分多様体は極小である。」という予想がある。 2 重調和の研究を進めていく上で、この予想の解決を行う必要があった。 この予想に対して多くの研究者により数々の研究結果が与えられたが未だ完全な解決は与えられていない。 完全な解決が与えられているのは以下の通り： (1) 曲線、(2) 3 次元ユークリッド空間内の曲面、(3) 4 次元ユークリッド空間内の超曲面。 これらの結果に対して用いられた手法はユークリッド空間の次元が 4 以下の場合にしか用いることができない。 また、Chen 予想は部分多様体に完備性の仮定がなされておらず、局所的な問題である。 そこで、この状況を打破するために部分多様体の完備性を仮定した問題を考え、部分的な解決を得た。 しかし、完全な解決には至らなかった。 そこで、予想の肯定的解決のみの研究ではなく、否定的解決の研究を行う試みが必要となった。

## 2. 研究の目的

(1) 安定な 2 重調和部分多様体の分類問題の研究。

安定な 2 重調和部分多様体の研究は解析的扱いの困難さから、代表的な研究としては E. Loubeau と C. Oniciuc の研究のみしかないのが現状である。 従って、この安定な 2 重調和部分多様体の研究は Chen 予想解決の方向性を定める研究であると同時に、安定な 2 重調和部分多様体の研究そのものの発展にも寄与する研究である。

(2) グラフとしての 2 重調和部分多様体の研究。

これは Bernstein 予想との類似性がある。 予想の否定的解決の研究ではこの Bernstein 予想の研究との類似性を用いた研究も有効であると思われる。

(1)、(2)の研究により、Chen 予想、及びその一般化された予想の(部分的)解決を行うことが目標である。

## 3. 研究の方法

(1) 安定な 2 重調和部分多様体の分類問題の研究。

Chen 予想解決のために予想が正しいか否かの見極めが必要である。 そのため、調和写像論及び極小部分多様体の理論において自

然でありかつ大変有用な「安定性の理論」を用いて予想の研究を行った。 具体的にはまず、安定な 2 重調和部分多様体を研究するため、調和となるための積分条件の研究を行った。 そして、次元の低い空間形内の超曲面から研究を行った。 特に、Chen 予想解決のためにユークリッド空間内の安定な 2 重調和部分多様体の研究を行った。 その後、外の空間が空間形の場合に研究を進めた。 そのための手法として極小部分多様体の安定性の理論を応用するという手法をとった。 2 重調和部分多様体の必要十分条件の複雑さ及び、安定性の理論に出てくる方程式の複雑さがあるため、その近似解の計算も行った。

(2) グラフとしての 2 重調和部分多様体の研究。

グラフとしての極小でない 2 重調和部分多様体の例を構成することを試みた。

## 4. 研究成果

(1) 安定な 2 重調和部分多様体の分類問題の研究。

安定な 2 重調和部分多様体を研究するため、調和となるための積分条件の研究を行った。 特に、完備リーマン多様体から非正曲率を持つリーマン多様体への  $k$  重調和写像を研究した。 得られた結果は次の通りである。

2 重調和写像が調和であることをエネルギー有限性と 2-エネルギー有限性よりも弱いある積分条件の元に示した。 特に、2 重調和部分多様体ではエネルギー有限性の仮定は必要ないことも示した。

の手法を  $k$  重調和写像へ応用した。 そして、 $k$ -エネルギー有限性よりも弱いある積分条件の元、写像が調和であることを示した。

浦川教授、中内教授との共同研究により、有限な 4-エネルギーと有限なテンション場の  $L^4$  ノルムを持つ 3 重調和等長はめ込みが調和となることを示した。 また、平均曲率一定な 3 重調和部分多様体を研究し、有限な 4-エネルギーの仮定の元、これが調和となることを示した。

これらの結果は大域版一般化された Chen 予想の肯定的部分的解決である。

(2) グラフとしての 2 重調和部分多様体の研究。

必要十分条件を書き下し、予想の反例の構成を試みたが、反例を作ることはできなかった。 しかし、この研究により少なくとも超曲面での反例の構成は難しいことが分かった。 また、予想の肯定的解決の可能性が高まった。

以上の研究の成果を 2013 年(ルーマニア)、2014 年(トルコ、日本)における国際研究会の招待講演で発表した。

(1)の、の手法は外の空間の曲率が上から押さえられているリーマン多様体内の 2 重調和部分多様体の研究にも有効であり、この手法を応用して「球面内の 2 重調和部分多

様体は平均曲率一定であろう。」という BMO 予想への肯定的部分的解決を行うことができた。この成果は現在論文にまとめ投稿中である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

1. Shun Maeta, Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa, Triharmonic isometric immersions into a manifold of non-positively constant curvature, Monatshefte für Mathematik (掲載決定). DOI: 10.1007/s00605-014-0713-4.
2. Shun Maeta, Polyharmonic maps of order  $k$  with finite  $L^p$   $k$ -energy into Euclidean spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 143, 2015, pp. 2227-2234.  
DOI:10.1090/S0002-9939-2014-12382-3
3. Shun Maeta, Biharmonic maps from a complete Riemannian manifold into a non-positively curved manifold, Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 46, 2014, pp. 75--85.  
DOI: 10.1007/s10455-014-9410-8

〔学会発表〕(計 5 件)

1. Shun Maeta, Biharmonic submanifolds and triharmonic submanifolds, International Workshop on Mathematical Sciences in Matsue, October 12, 2014 (Simane University, Matsue, Japan).
2. Shun Maeta, Biharmonic submanifolds, triharmonic submanifolds and Chen's conjecture, International Workshop on Finite Type Submanifolds,

September 4, 2014 (Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey)

3. 前田 瞬, 2重調和部分多様体と Chen 予想, 松江セミナー, 2014 年 7 月 2 日 (島根大学)
4. 浦川 肇, 中内 伸光, 前田 瞬, Chen 予想と 3 重調和部分多様体, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 16 日 (学習院大学)
5. Shun Maeta, Biharmonic submanifolds and Chen's Conjecture, Conferinta of Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" 2013. September 12. (Universitatea "Alexandru Ioan Cuza")

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/shunmaeta/home>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

前田 瞬 (SHUN MAETA)

島根大学・総合理工学研究科・講師

研究者番号：00709644

(2)研究分担者 ( )

研究者番号：

(3)連携研究者 ( )

研究者番号：