1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２７年　５月１４日現在

機関番号：３２６８９

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：２５８８７０４８

研究課題名（和文）動く曲面上における流体方程式の導出とその数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis on fluid-flow on a moving hypersurface

研究代表者

古場　一（Koba, Hajime）

早稲田大学・理工学術院・助教

研究者番号：８０７０７７２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：動く曲面上における流体の流れを支配する方程式を現象かつ理論的な観点から考察し、動く曲面上での流体の流れがどのような支配のもとで流動し、その流れが変化していくかを数理的手法によって明らかにすることがこの研究の目的である。動いている(回転や併進運動をしている)曲面上の流れの持つエネルギーに着目し、動く曲面上の流体の流れが満たすべき関係式(支配方程式)の導出を行った。研究成果として、動く曲面上における流体の流れが、曲面の動きおよび曲面の曲率に影響していることが理論的に証明できた。

研究成果の概要（英文）：We are concerned with the dominant equations for the motion of fluid on a moving hypersurface. A moving hypersurface means that the hypersurface is rotating or moving in a straight line. We focus on kinematic and dissipation energies to study fluid-flow on a moving hypersurface. Our results make us to understand that fluid-flow on a moving hypersurface depend on both the curvature and motion of the moving hypersurface.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：流体　曲面　オイラー方程式　ナヴィエ・ストークス方程式　曲率　エネルギー　超曲面　多様体

１．研究開始当初の背景

大気や海洋などの大規模なスケールの流体のことを総称して地球流体と呼ぶ。地球流体を研究する上で重要なことは、地球流体は回転と成層の影響を強く受けるということである。回転とは地球の自転のことであり、成層とは密度成層や温度成層のことを指している。そのため、地球流体の運動(流れ）は回転パラメータと成層パラメータ(浮力[重力]パラメータを含む）を含む速度場、温度(分布）場、圧力場を連立させた非線形偏微分方程式で記述されると考えられている(地球流体方程式)。これまで、三次元全空間内の一般領域(全空間、半空間、有界領域や外部領域)における地球流体方程式の数学解析や二次元平面に帰着させた地球流体モデルの構築や数値解析が主に行われてきた。

現象として考えて見ると(図１の上図)、地球流体(大気や海洋）は地球表面上の大規模なスケールの流体であり、地球表面上で考えることが自然である。そのため、動く球面上で流体の流れを考察する必要がある。他にも、変形(動き)を伴う生体膜中の流体の流れ(図１の下図)やシャボン玉の膜中の石鹸水の流れ(界面流・表面流)なども動いている曲面上(内)の流れだと考えることができ、動く曲面上の流れを考えることは重要である。

動く曲面上における流体の流れの工学的なモデルや理論物理を用いたモデルがいくつか考案されている。しかし、数学的に動く曲面上における流体の流れを支配する方程式を導出及び考察した結果は少ない。これまで、動かない(固定された)曲面(コンパクトリーマン多様体）上での流体方程式の導出が微分幾何的なアプローチや確率的な手法を用いて行われている(引用文献①―⑤)。①、②は流体の粘性がないもの(完全流体)を、③、④、⑤は粘性がある流体を取り扱っている。後者においては、その導出された固定曲面上における非圧縮性粘性流体方程式にはリッチ曲率と呼ばれる曲率が表れている。その導出においては曲面の回転運動や並進運動の影響は考慮されていない。実際、地球は自転･公転しているため、球面が動いているモデルを考察する必要があり、動く曲面上における流体の流れを支配する方程式を理論的に導出することが求められる。

動く曲面上における流体の流れを研究することにより、地球流体の流れ、生体膜内の流れやシャボン玉の膜中の石鹸水の流れなどの様々な流体の現象を理論的に理解することが可能となる。

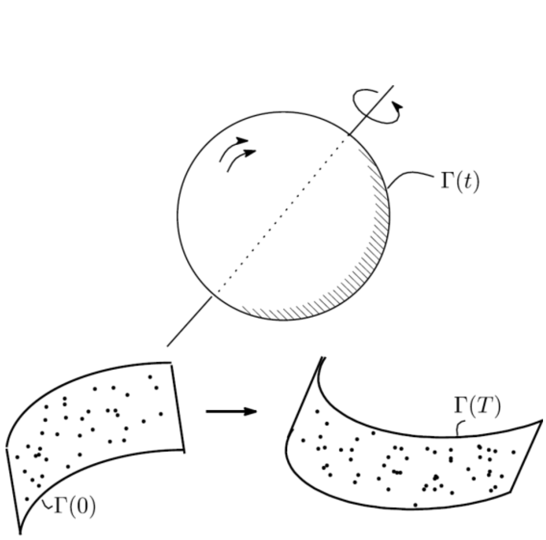

図１

２．研究の目的

本研究の目的は、動く曲面上における流体の流れを支配する方程式を現象かつ理論的な観点から考察し、動く曲面上での流体の流れがどのような支配のもとで流動し、その流れが変化していくかを数理的手法によって明らかにすることである。具体的には、解析的手法(実解析、関数解析）と幾何的手法(計量幾何、リーマン幾何学）を用い、回転や並進運動をしている曲面上の流体の流れを支配する方程式の導出し、その支配方程式の解の存在と性質を調べることである。以下の３つの予想を解明することを主な研究目的である。

（１）引用文献①―⑤で導出された固定された曲面上における流体方程式と同様に、動きのある曲面上における流体の流れも曲面の曲率に影響されていると予想される。また、曲面の動きに流れが影響していることも期待され、それらを理論的に明らかにする。

（２）導出した動く曲面上の流体方程式と静止している曲面上での流体方程式の構造の違いについて調べる。動く曲面上の流体の流れが曲面の動きによって変化することが期待され、それを観察する。

（３）曲面の曲率が緩やかでかつ曲面の動きが極端でなければ、導出した動く曲面上での流体方程式は解をもつと予想され、その予想を明らかにする。

３．研究の方法

実解析、関数解析、リーマン幾何学や計量幾何等の数理的手法を用いて研究を遂行していく。具体的には、回転運動や並進運動をして

いる二次曲面(群) 上での流体の流れについて考える。二次曲面(多様体) をユークリッド三次元空間内に埋め込み、ユークリッド空間の座標の立場から流体の流れを考察していく。曲面の動き、流体のエネルギー、流体の粘性に着目し、動く曲面上における流体の流れが満たすべき方程式を導出する。方法としては、リーマン幾何学、変分原理、計量幾何等の数理的手法を用いて支配方程式の導出を行い、実解析や関数解析的な手法によって方程式の解の存在について調べる。上記の研究目的(１)―(３)に対して、以下の３つの研究を行う。

(１) エネルギーや力のつりあいの観点から流体の流れが満たすべき条件を調べる。オイラー座標系とラグランジュ座標系の両方の座標系に関して流体の流れを考える。動く曲面をΓとし、曲面の動きを w､曲面上の流体の流れを u とする(図２)。それぞれが持つエネルギーや力関係に着目し、動く曲面における流体の流れが満たすべき方程式を導出する。また、動く曲面上における流体の圧縮性(密度が関数)や非圧縮性(密度が一定)に関する特徴づけを行う。
(２) 動きのない曲面上の流体方程式と動く曲面上の流体方程式の構造の比較を行う。また、引用文献①―⑤で導出された固定曲面上の流体方程式と導出した方程式との比較を行う。
(３) 流体の持つエネルギーに着目し関数空間を設定し、その関数空間内での方程式の可解性を調べる。

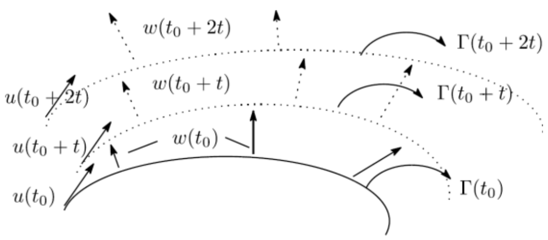

図２

４．研究成果

数理的手法を用いて、動く曲面上における流体の流れを支配する方程式を導出することができ、動く曲面上における流体の流れが曲面の曲率および曲面の動きに依存していることを理論的に証明することができた。この研究成果から、地球流体の流れやシャボン玉の膜中の石鹸水の流れなどの動く曲面上の流体の流れ(表面流)を考慮しなければならない様々な流体の現象の解明につながることが期待できる。
上記の(１)―(３)に対し以下の研究成果を得た。

(１) 非粘性非圧縮性流体、粘性非圧縮性流体、非粘性圧縮性流体、粘性圧縮性流体の４つの流体に分類し、それぞれの流体に関して動く曲面上の流体方程式の導出を行った。また、外力や重力下での動く曲面上における流体の流れについての研究も行い、外力や重力下で動いている曲面上の流体の流れが、曲面の動き、曲面の曲率や重力・外力に依存していることも確認できた。また、動く曲面上の流体に関する非圧縮性条件等も得られた。
(２) 動きがない曲面上の流体方程式と動きのある曲面上の流体方程式は構造が異なることが確認できた。固定曲面上の流体の流れは曲面の曲率に依存しており、動く曲面上の流体は曲面の動きと曲率の両方に依存していることが確認できた。動く曲面上における流体の圧力に関しても考察を行い、曲面の動きを制限することによって、支配方程式内の圧力の式の形が変わることが観察できた。
(３) 導出した動く曲面上に流体方程式の解の存在性に関しては、特殊な条件を課すことで解の存在性はいえるが、より一般的な場合に関して考察する必要があり、今後のさらなる研究が必要である。

＜引用文献＞

① V.I.Arnold,“Sur la geometrie differ-rrentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applicationsa l'hydrodynamique des fluides parfa-its” (French), Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 1966 fasc. 1 319--361.
② V.I. Arnold,“Mathematical methods of classical mechanics”. Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein. Corrected reprint of the second (1989) edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1997. xvi+516 pp. ISBN: 0-387-96890-3
③ M.E. Taylor,“Analysis on Morrey spa-ces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations”.Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 9-10, 1407--1456.
④ Y. Mitsumatsu and Y. Yoshihiko, “Geometry of an incompressible fluid on a Riemannian manifold”. (Japanese) Geometric mechanics (Japanese) (Kyoto, 2002).Surikaisekikenkyusho Koukyur-oku, No. 1260 (2002), 33--47.
⑤ M. Arnaudon, A.B. Cruzeiro, “Lagra-ngian Navier-Stokes diffusions on manifolds: variational principle and stability”. Bull. Sci. Math. 136 (2012), no. 8, 857--881.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計４件）

① 古場一、“動く曲面上における流体の流れに関して”、日本数学会 2015 年度年会、2015 年 3 月 22 日、 明治大学
② Hajime Koba、“Derivation of the Euler and Navier-Stokes systems from kinetic and dissipation energies″、若手による流体力学の基礎方程式研究集会、2015 年 1 月 5 日、名古屋大学多元数理科学研究科
③ Hajime Koba、“On fluid-flow on an evolving hypersurface”、Autumn School and Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Evangelische Akademie Bad Boll、October 30, 2014、Evangelische Akademie Bad Boll (Germany)
④ Hajime Koba、“Mathematical Analysis on Fluid-Flow on Evolving Hypersurface″、Fourth Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, September 19, 2013、Tokyo Institute of Technology

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
特になし

６．研究組織

(1)研究代表者
古場　一（KOBA, Hajime）
早稲田大学・理工学術院・助教
　研究者番号：80707729