



研究代表者	立教大学・理学部・教授 阿部 拓郎（あべ たくろう）	研究者番号：50435971
研究課題情報	課題番号：25H00399 キーワード：超平面配置、対数的ベクトル場、対称性、組み合わせ論、AIと識別超平面配置	研究期間：2025年度～2029年度

なぜこの研究を行おうと思ったのか（研究の背景・目的）

●研究の全体像

植木算の高次元化として研究が始まった超平面配置は対称性の数学といえるルート系の幾何学的一般化といえ、代数・幾何・組み合わせ論・表現論など様々な観点から研究が行われている（図1参照）。他方、植木算がそうであったように、超平面配置には「物事を分ける」という側面を持ち、この観点は画像識別AIなどの基本的な動作原理である。本研究ではまず前者の観点から、その代数的側面である対数的ベクトル場の理論を中心に近年の様々な理論を統一的に理解する新理論を構築する。後者はAIが識別に用いる識別超平面配置（図1参照）を研究することで「AIの理解を数学的に理解」することを目指す。

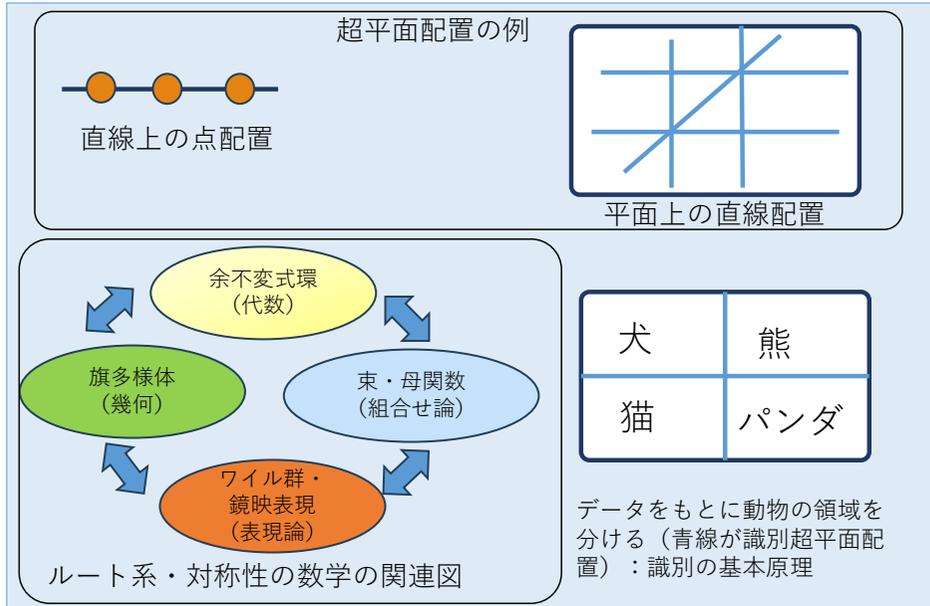


図1 超平面配置の例と研究の基礎

●研究の目的

超平面配置はベクトル空間中の超平面の有限集合であり、図1のように直線上の点や平面上の直線を例とする、極めてシンプルな幾何学的対象である。近年研究チームらにより、その代数的側面である対数的ベクトル場の理論が大きく発展し、Solomon-寺尾多項式を中心とする新しい世界が開拓された。超平面配置の祖であったルート系が（余）不変式環の理論を中心に代数・幾何・表現論・組み合わせ論が展開されたように、一般の超平面配置に対してもこの対数的ベクトル場・Solomon-寺尾理論を幾何・表現論・組み合わせ論的に理解することで全く新しい研究領域を創生する。同時に応用面では、近年世界を席巻している深層学習AIの中でも画像などを識別する識別AIに着目する。これは大量のデータをベクトル化して空間に配置し、それを超平面で区切ることで識別を行っている（識別超平面配置）。他方AIが何をどう理解して判別して

いるかはブラックボックスであり、問題となっていた。そこで本研究では、AIが生成する識別超平面配置を数学的に分析することで、AI同士の比較や理解を定量的に行うことを目指す（図2参照）。また古典的識別機であるサポートベクターマシン（SVM）の過学習問題や、敵対的サンプルなどの暗号・符号理論的な問題にも超平面配置を用いてアプローチする。

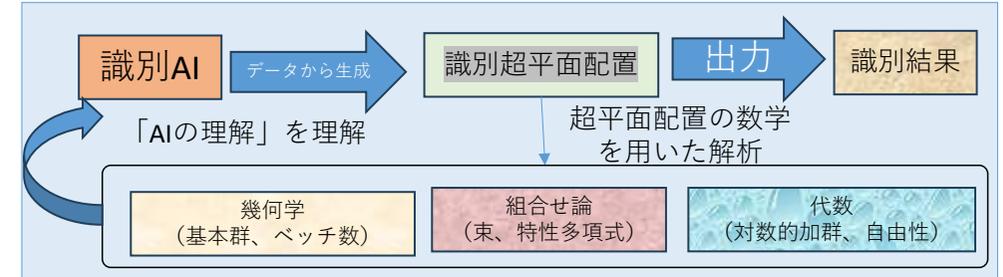


図2 応用研究のイメージ図

この研究によって何をどこまで明らかにしようとしているのか

●より具体的な目的

1. 対数的ベクトル場を用いたSolomon-寺尾二変数多項式の理解を完成させる（図3赤枠）。
2. 1の多項式の幾何学・表現論・組み合わせ論的な解釈の構築。具体的にはHessenberg多様体、critical多様体の幾何・Liouville複体・準不変式の表現論・超空間代数の組み合わせ論を用いてこれを理解する（図3点線部分）。
3. 上記理解を、Solomon-寺尾理論を軸として関連付け、新領域を創生する（図3緑枠）。
4. 識別AIが生成する識別超平面配置の数学的普遍量を解析・比較することでAIの理解・説明・比較・制御を定量的に実現する。そのモデルケースとしてSVMの過学習などにも同様のアプローチを行う。
5. 4の暗号・符号理論への応用を行う。

●研究の独創性

1. 理論面では、様々な分野を超平面配置を起点として統一的に理解し新領域を創生しようとする点は極めて独創的である。かつその新領域を用いて古典的な超平面配置の未解決問題に挑戦することを考えており、この点も非常に新しい試みである。
2. 応用面では、ブラックボックス化しているAIの研究を、超平面配置という数学を用いて客観的・定量的な理解を目指しており、この点は極めて独創性が高い

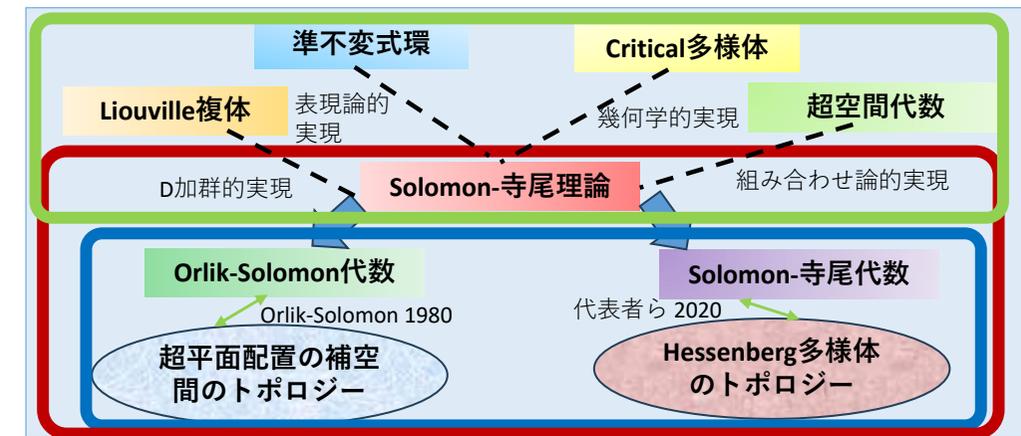


図3 理論研究の説明（青枠：既存の枠組 赤枠：完成しつつある枠組 緑枠：統合を目指す枠組み・新理論）