

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2014～2018

課題番号：26220701

研究課題名（和文）統計と計算を戦略とする可換代数と凸多面体論の現代的潮流の誕生

研究課題名（英文）The birth of modern trends on commutative algebra and convex polytopes with statistical and computational strategies

研究代表者

日比 孝之（Hibi, Takayuki）

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：80181113

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 140,300,000円

研究成果の概要（和文）：本基盤研究（S）は、可換代数の国際会議、グレブナー基底のプロジェクト研究、凸多面体のワークショップなどの公式行事を開催し、海外から、ポスドクと大学院生を含む、外国人研究者127名を招聘し、当該分野の国際共同研究の盤石な枠組を構築するとともに、国内と海外の若手研究者の育成を促進した。純粋数学の研究面では、反射的凸多面体、実験計画と凸多面体、分割表とポリオミノイデアル、A超幾何系と凸多面体、ホロノミック勾配法、二項式イデアル、シチジー理論、などに関する独創的な成果が得られ、可換代数と凸多面体論の斬新な潮流を誘うことに成功している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可換代数も凸多面体論も、伝統的な純粋数学の研究分野である。両者の相互関係は、1980年以降、著しい発展を遂げ、可換代数と組合せ論と呼ばれる境界分野が誕生した。本基盤研究（S）は、「統計」、及び、「計算」の観点から、可換代数、及び、凸多面体論の現代的な潮流を誘うことを目的とし、その研究を展開した。その結果、可換代数と統計と凸多面体論の華麗なる三重奏を誕生させることに成功し、今後の10年間の、可換代数と凸多面体論の輝かしい展望を切り開いた。

研究成果の概要（英文）：The present research project holds official events such as international conferences on commutative algebra, Groebner basis projects and workshops on convex polytopes with inviting 127 foreign researchers, including postdocs and graduate students, from overseas. It conducts the solid framework for prospective international joint research in this research field. Furthermore, cultivation of human resources of domestic and overseas young researchers is promoted. From the viewpoint of research, a huge amount of original results on the topics, including reflexive polytopes, experimental design and convex polytopes, contingency tables and polyomino ideals, A-hypergeometric systems and convex polytopes, holonomic gradient methods, binomial ideals and syzygy theory, have been obtained. It turns out that our project succeeded in inviting new trends of commutative algebra and convex polytopes.

研究分野：計算可換代数と組合せ論

キーワード：グレブナー基底 二項式イデアル 凸多面体 実験計画 A超幾何系 ホロノミック勾配法 分割表

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業(数学領域)の研究課題「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(2008年10月~2014年3月;通称、日比プロジェクト)は、代数、統計、計算の研究者から構成される仮想研究所であり、グレブナー基底のブレークスルーを発祥させることに成功している。ポスト日比プロジェクトの本基盤研究(S)は、代数、統計、計算の盤石な研究組織を堅持し、日比プロジェクトから芽生えた純粋数学の独創的な着想を育み、可換代数、凸多面体、統計、計算を包括する壮大な景観を披露する。

## 2. 研究の目的

廣中平祐が1964年、Bruno Buchbergerが1965年、それぞれ、独立に発見したグレブナー基底の概念は、コンピュータの目覚ましい発達之恩恵を受け、1985年以降、劇的に発展し、可換環論と代数幾何などに深い影響を及ぼすとともに、可換代数の計算可能なテクニックを、統計数学、整数計画、符号理論などに応用する魅惑的な路を開拓した。そのような背景を踏まえ、研究代表者は、日本学術振興会の国際研究集会、京都大学数理解析研究所のプロジェクト研究を組織し、当該分野の土壌を育んだ。科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業(CREST)の研究課題「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」(2008年10月~2014年3月;通称、日比プロジェクト [数学65(2013), 303--308])は、代数、統計、計算の研究者から構成される仮想研究所であり、研究代表者によるトップダウン方式から、グレブナー基底と周辺分野のブレークスルーを発祥させることに成功している(『グレブナー道場』(共立出版)2011)。

本基盤研究(S)は、ポスト日比プロジェクトの研究提案であり、日比プロジェクトの主たるメンバーが連携研究者として参画する。公式行事の一つは、研究代表者と連携研究者が組織委員を務める、日本数学会季期研究所「グレブナー基底の50年」(平成27年7月)である。その集会を通し、我が国、及び、欧米諸国において、類似の国際会議を継続的に開催するための盤石な礎を築く。日比プロジェクトは、産業社会への貢献が強く要求されていたが、純粋数学の側面からも、きわめて多くの独創的な着想が芽生え、育ちつつある。それゆえ、研究代表者の眼前には、可換代数、凸多面体、統計、計算を包括する壮大な景観が広がっており、その研究の戦略的な推進が急務である。これが、本基盤研究(S)の提案の根拠である。

以下、本基盤研究(S)の研究面における課題と到達目標を列挙する。

- (1) 古典的な可換代数は、代数幾何、整数論、表現論、ホモロジー代数などとの相互影響を保ちながら発展した。40余年前、組合せ論を源とする可換代数の斬新な潮流が誕生([日比孝之『可換代数と組合せ論』(シュプリンガー東京)1995])し、単項式イデアルの可換代数が飛躍的な発展を遂げ、魅惑的な世界([J. Herzog and T. Hibi, *Monomial Ideals*, GTM 260, Springer, 2011])が築かれた。その歴史的経緯と成功を踏まえ、日比プロジェクトが育んだ、可換代数と統計学の境界領域の急激な展開を継承し、本基盤研究(S)は、統計モデルと実験計画を戦略とし、二項式イデアルの秘宝を発掘し、黎明期である、二項式イデアルの可換代数を劇的に深化させ、可換代数の現代的潮流を誘う。
- (2) オイラーの公式、ピックの公式などにその源を持つ凸多面体論は、組合せ論の伝統的な分野である。1970年代以降、その潮流は劇変する。抽象論から具象論への時代の流れを背景に、可換代数、代数幾何との魅惑的な接点が発見され、代数学の抽象論から凸多面体の具象論への架け橋が築かれる。その後、計算機の急激な発展、ソフトウェアの進化を追い風とし、凸多面体論は計算代数の色彩を帯び、技の宝庫であるグレブナー基底之恩恵に浴する。本基盤研究(S)は、統計と計算を戦略とし、凸多面体の代数的組合せ論のパラダイムシフトを誘う。すなわち、凸多面体の組合せ論と統計数学の魅惑的な相互関係(Gel'fandの思想)を発掘し、凸多面体論の再編と変革を誘う。そのような相互関係を媒介するものが、グレブナー基底であり、A超幾何系(GKZ超幾何系)である。

グレブナー基底をキーワードとし、代数、統計、計算の研究者が集うプロジェクト研究は、欧米諸国でも類い希である。グレブナー基底と産業社会を調和させる、という日比プロジェクトの哲学は、功を奏し、代数、統計、計算の研究組織が円滑に機能し、提案段階の予想を遙かに越える輝かしい研究成果を残している。本基盤研究(S)の成功の秘策は、その有機的な研究組織を発展的に継続させることに尽きる。代数、統計、計算の密な連携から、日比プロジェクトで芽生えている、可換代数と凸多面体論に関する独創的な着想を、大きな理論へと育み、更に、斬新な研究領域を創設するという筋書は、ポスト日比プロジェクトである本基盤研究(S)ゆえの、独創的なストーリー展開である。日比プロジェクトと本基盤研究(S)の10年間の総合的な研究から、代数、統計、計算の深遠なる連携が深く浸透し、永続的、発展的な展開へと踏襲される。

## 3. 研究の方法

本基盤研究(S)は、ポスト日比プロジェクトの研究提案であり、日比プロジェクトの仮想研究所の研究体制を維持した。研究代表者は、研究の展開を総括的に把握し、研究全体を推進した。連携研究者の大杉英史は、トーリックイデアルのグレブナー基底に関する研究を、竹村彰通と青木敏は、統計に関する専門領域の研究を、高山信毅と野呂正行は、計算に関する専門領域の研究を、それぞれ、展開し、研究代表者らとの共同研究を実施した。なお、海外共同研究者のJ. Herzog教授(Duisburg--Essen大学)は、可換代数に関する専門知識を、R. Stanley教授(MIT)は、凸多面体に関する専門知識を、それぞれ、必要に応じ、提供した。

- (1) 国際的な観点から、本基盤研究 (S) の研究を展開し、当該分野の若手研究者を育成するため、次の公式行事を実施した。
- (平成 27 年) 日本数学会季期研究所「グレブナー基底の 50 年」(ホテル日航大阪)
  - (平成 28 年) 京都大学数理解析研究所プロジェクト研究「グレブナー基底の展望」
  - (平成 29 年) 国際会議「可換代数の展望」(ホテル日航大阪)
  - (平成 30 年) Summer Workshop on Lattice Polytopes (大阪大学大学院情報科学研究科)
- (2) 以下、本基盤研究 (S) の研究面での戦略、研究代表者と連携研究者の役割分担などを列挙する。

- 研究代表者は、連携研究者、海外共同研究者らとの密接な研究連絡を維持し、積極的な共同研究を推進し、可換代数、凸多面体論の両者の現代的潮流を誘う研究を展開した。更に、東谷章弘 (阪大・准教授) と土谷昭善 (東大・学振 PD) を国内共同研究者とし、格子凸多面体に関する共同研究を展開し、松田一徳 (北見工大・准教授) と木村杏子 (静岡大・准教授) を国内共同研究者とし、シチジー理論に関する共同研究を遂行した。
- 研究代表者と大杉英史は、従来の研究を踏襲し、有限グラフ、半順序集合、凸多面体に付随するさまざまな二項式イデアルのグレブナー基底を研究した。更に、J. Herzog も加わり、二項式イデアルを巡る可換代数、統計、組合せ論に関する集大成となる単行本 Binomial Ideals の原稿執筆のため、著者の 3 名は、2015 年 9 月と 2016 年 9 月、それぞれ、2 週間、Oberwolfach 数学研究所 (ドイツ) に滞在した。その単行本 “Binomial Ideals” は、2018 年、Springer 社の数学シリーズ Graduate Texts in Mathematics の第 279 巻として出版された。
- 研究代表者と青木敏、大杉英史は、実験計画、可換代数、凸多面体の独創的な連携の発掘を狙い、トーリックイデアルのグレブナー基底の基礎理論を媒介とし、格子凸多面体の正則単模三角形分割から、実験計画のマルコフ基底を探索する研究を展開した。特に、多水準一部実施計画のマルコフ基底の計算に挑戦し、Box-Behnken 計画と呼ばれる 3 水準の一部実施計画の主効果モデルのマルコフ基底の発掘に成功した。更に、研究代表者と青木敏は、ポリオミノから派生する二項式イデアルを駆使し、煩雑な分割表の統計モデルを提唱し、マルコフ連鎖モンテカルロ法による統計的仮説検定を遂行した。
- 高山信毅と竹村彰通は、日比プロジェクトを踏襲し、ホロノミック勾配法の研究を継承し、A 超幾何分布にホロノミック勾配法を効率的に適用する独創的な方法を提唱した。ホロノミック勾配法は、D 加群のアルゴリズムと計算を統計学に応用する画期的な手法であり、指数型分布族の正規化定数、最尤推定量の計算のための、従来の手法の限界を遥かに越える、汎用的な方法を統計学に提供する。研究代表者と高山信毅らは、ホロノミック勾配法の理論的効率性、すなわち、パフィアン系の計算量の視点から、A 超幾何系と格子凸多面体の連携を探究した。
- 野呂正行と大杉英史は、日比プロジェクトを踏襲し、グレブナー基底の計算理論の開拓を継承した。野呂正行は、ソフトウェアを含む、さまざまな方法を駆使することから得られる、グレブナー基底の候補が、実際、グレブナー基底であることを保証するための斬新な理論を構築した。大杉英史は、グラフ理論と半順序集合の古典的な結果、凸多面体の三角形分割の情報を戦略とし、グレブナー基底の代数計算を深化させ、際立った特徴を持つグレブナー基底を発掘した。

#### 4. 研究成果

- (1) 公式行事の概要と成果を列挙する。

- 名称：第 8 回日本数学会季期研究所「グレブナー基底の 50 年」(The 8th MSJ-SI “Current Trends on Gröbner Bases ---The 50th Anniversary of Gröbner Bases---”)  
 日時：2015 年 7 月 1 日 ~ 7 月 10 日  
 場所：ホテル日航大阪 (大阪市中央区西心斎橋)  
 参加者総数：93 名 (内、海外 13 ヶ国から 47 名)  
 概要と成果：グレブナー基底の誕生 50 年を記念し、創始者 Bruno Buchberger を招聘し、スクールと研究集会を実施した。スクールは、グレブナー基底が活躍する舞台から、特に、可換代数と代数幾何、代数統計、D 加群の理論を選び、大学院生とポスドクを含む若手研究者向けの教育的な連続講演と演習を実施した。研究集会は、欧米諸国からの大御所とともに、新進気鋭の研究者が、グレブナー基底に纏わる最近の話題を披露し、グレブナー基底の現状と展望を議論し、将来の国際共同研究の礎を築くことに成功した。報告集は、Advanced Studies in Pure Mathematics のシリーズから出版した (第 77 巻、2018 年 8 月)。
- 名称：平成 28 年度京都大学数理解析研究所プロジェクト研究「グレブナー基底の展望」  
 日時：平成 28 年 4 月 1 日 ~ 平成 29 年 3 月 31 日  
 場所：京都大学数理解析研究所  
 参加者総数：207 名 (内、海外 7 ヶ国から 53 名)  
 概要と成果：RIMS 研究集会、RIMS 合宿型セミナー、隔週セミナー、連続講演などを開催し、国内、国外のグレブナー基底の研究者が一堂に会する機会を設けた。RIMS 研究集会 (Application of Algebraic Methods to Statistics; Algebraic Statistics and Symbolic Computation; Computational Commutative Algebra and Convex Polytopes) と RIMS 合宿型セミナー (Binomial Ideals and Algebraic Statistics) の欧米諸国からの招待講演者による講演と討論から、グレブナー基底に関する多様な側面の相互理解を深め、今後の展望を探るとともに、将来解決すべき諸問題を提示し、次世代を担う若手研究者の育成を促進した。

● 名称：国際会議「可換代数の展望」

日時：平成 29 年 7 月 10 日 ~ 7 月 14 日

場所：ホテル日航大阪

参加者総数：117 名（内、海外 9 ヶ国から 47 名）

概要と成果：組織委員は D. Cutkosky, D. Eisenbud, S. Goto, J. Herzog と研究代表者である。欧米諸国から 20 名の研究者を招待講演者として招聘し、可換代数と周辺分野の現状と展望を探り、活発な議論と討論から、可換環論の今後の潮流を誘う国際会議となった。ベトナム、インドなどのアジア諸国の若手研究者の参加も援助をし、アジア諸国における可換環論の総合的展開を育むための土壌を築いた。報告集は、Acta Mathematica Vietnamica の Special Issue (Volume 44, Issue 1, March 2019) として出版し、17 編の論文が掲載されている。当該国際会議の webpage (<http://commalg2017.jp>) は永久保存である。

● 名称：Summer Workshop on Lattice Polytopes

日時：2018 年 7 月 23 日 ~ 8 月 10 日

場所：大阪大学大学院情報科学研究科

参加者総数：57 名（内、海外 5 ヶ国から 30 名）

概要と成果：欧米諸国から格子凸多面体のポスドクと大学院生を、3 週間、大阪大学大学院情報科学研究科に招聘し、第 1 週はスクール、第 2 週はワークショップ、第 3 週は自由討論を実施した。大御所を招聘することはやらず、ポスドクと大学院生の自発的な交流を促進し、今後、当該分野の国際舞台で活躍することができるような若手研究者を育む一翼を担う集会となった。スクールの講演者と講演題目は、Johannes Hofscheier (McMaster University, Canada)

[Toric geometry with a view towards lattice polytopes]; Katharina Jochemko (KTH Royal Institute of Technology, Sweden) [Valuations on lattice polytopes] である。ワークショップの講演者は、32 名（内、海外から 30 名）であり、海外から招聘したポスドクと大学院生の全員が講演をした。更に、講演者の全員に報告集に論文を投稿することを義務とした。報告集 “Algebraic and Geometric Combinatorics on Lattice Polytopes” は、2019 年、World Scientific から出版され、欧米諸国の凸多面体論の大御所に配布した。

(2) 研究面の成果を列挙する。

● (反射的凸多面体) 格子凸多面体とは、すべての頂点が整数点である凸多面体のことである。次元  $d$  の格子凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  が原点を内部に含み、双対凸多面体  $P^\vee = \{ a \in \mathbb{R}^d : \langle a, b \rangle \geq 1, b \in P \}$  も格子凸多面体であるとき、反射的と呼ばれる。但し、 $\langle a, b \rangle$  は  $\mathbb{R}^d$  の通常の内積である。任意の格子凸多面体は、或る反射的凸多面体の面（ファセットとは限らない）になっている、という事実から、反射的凸多面体は、十分に豊かな格子凸多面体の類である。反射的凸多面体は、可換代数の Gorenstein 環、トーリック多様体論とミラー対称性などとも関連し、格子凸多面体の理論におけるもっとも魅力的な研究対象である。一般に、原点を内部に含むとは限らないような  $d$  次元格子凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  が Gorenstein 多面体であるとは適当な整数  $N > 0$  を選ぶと、ふくらまし  $NP = \{ Na : a \in P \}$  が反射的凸多面体に unimodular 同値であるときに言う。研究代表者は、格子点の数え上げ多項式（通称、Ehrhart 多項式）を使い Gorenstein 多面体の特徴付けた ([Combinatorica 12 (1992), 237--240])。研究代表者と大杉英史、土谷昭善らは、有限半順序集合、単体的複体などから、正規な反射的凸多面体を構成する研究 ([J. Combin. Theory Ser. A 157 (2018) 233--246] など) を展開し、正規な反射的凸多面体の理論を飛躍的に発展させる土壌を育んだ。格子凸多面体の対  $(P, Q)$  の  $\Gamma$  対と  $\Omega$  対と呼ばれる概念を導入し、逆辞書式グレブナー基底の理論を武器に、反射的凸多面体の斬新な類を大量に生産するための独創的な理論の構築に成功した。とりわけ、 $P$  と  $Q$  が順序凸多面体、鎖凸多面体、及び、安定集合凸多面体などのときを探究し、或る条件の下、それらの  $\Gamma$  対と  $\Omega$  対が正規な反射的凸多面体になることを示した。その系の一つは、次元  $d$  の順序凸多面体と鎖凸多面体は、必ず次元  $d+1$  の正規な反射的凸多面体のファセットとなることである。これは懸案の予想を肯定的に解決した成果である。更に、有限グラフのパーフェクト性を、安定集合凸多面体の  $\Gamma$  対と  $\Omega$  対の正規性と反射性から特徴付けた ([J. Algebraic Combin. 49 (2018), 69--81])。

● (実験計画と凸多面体) 多因子実験計画により得られた頻度データに対する統計モデルの当てはまりを、条件付分布にもとづく有意確率により評価するという接近法において、漸近分布論の当てはまりが悪く、しかも、正確検定も困難な場合には、マルコフ連鎖モンテカルロ法による有意確率の数値計算が実用上有効である。その際、標本空間上に既約な連鎖を構成するための推移基底（マルコフ基底）を計算することが必須である。従来から、マルコフ基底は多項式環のトーリックイデアルの生成系として特徴付けられることが知られている。しかも、そのトーリックイデアルの配置行列は、考えている計画行列と統計モデルから決定することができる。論文 [J. Stat. Theory Pract. 10 (2016), 59--72] では、Box--Behnken 計画と呼ばれる 3 水準の一部実施計画を探究し、そのもっとも基本的なモデルである、主効果モデルと呼ばれる統計モデルを当てはめる際、マルコフ基底が D 型根系の centrally symmetric な配置行列に対応することに着目した。D 型根系に付随する格子凸多面体の単模三角形分割は、Matthias Beck らにより、具体的に構成されている。一般論から、配置行列の凸閉包である格子凸多面体の正則三角形分割は、その配置行列のトーリックイデアルのグレブナー基底から操ることができる。研究代表者らは、その単模三角形分割が正則であるとの作業仮説の下、単模三角形分割の詳細な分析から D 型根系の配置行列のトーリックイデアルの或る単項式順序に関するグレブナー基底を、素手計算（す

なわち、アルゴリズムとは無縁な代数計算など)を駆使し、発掘することに成功している。そのグレブナー基底は、8種類の二項式の集合から成るが、その内の一種類は3次の二項式である。しかも、簡単な計算から、生成系としては、3次の二項式は除外できることが従う。その結果、Box-Behnken 計画の主効果モデルは二次のマルコフ基底を持つことが判明する。研究代表者らは、そのマルコフ基底を使い、実データをマルコフ連鎖モンテカルロ法により検定している。歴史上、3水準の一部実施計画をマルコフ連鎖モンテカルロ法により検定した仕事は存在せず、きわめて独創的な実験計画の研究である。研究代表者らは、経験上、素手計算から発掘できるグレブナー基底は二次二項式から成るものに限ると信じていたが、そのような経験上の常識を覆すものである。しかも、格子凸多面体の三角形分割から、いわば逆解きの着想によりグレブナー基底を発掘できたことは驚嘆に値し、今後の代数計算の展開への扉を開く開拓的な仕事である。

● (ポリオミノイデアルと分割表) 符号を考慮した ladder determinantal 型のポリオミノに付随する二項式イデアルが二次のグレブナー基底を持つことを証明し、分割表の検定に応用した ([J. Algebraic Stat. 8 (2017), 56--73])。分割表で (a) 固定ゼロのセルを含み (b) 固定する十分統計量が特定の部分和を含み (c) 部分和の制約が二次元変化点問題に対応するものを探究し、そのマルコフ基底が ladder determinantal 型のポリオミノの二項式イデアルの生成系に対応することを示し、(a) と (b) と (c) を満たす具体的な分割表のマルコフ連鎖モンテカルロ法による検定を遂行した。そのような著しく煩雑な分割表の検定は、従来の分割表の研究では皆無であり、計算代数統計の分野における分割表の検定の斬新な展開を導く仕事である。

● (A超幾何系と凸多面体) A超幾何関数はホロノミック系の解である。従って、原理的には、そのパフィアン系を表示することは可能である。しかし、その計算量はきわめて大きく、ホロノミック勾配法を統計へ応用する際は、効率の良い計算方法を与える必要がある。研究代表者と高山信毅らは、パラメータがジェネリックな場合のパフィアン系の基底 (twisted cohomology group の基底) を表示するための、計算代数的なテクニックを開発し、2本の鎖から成る有限半順序集合の順序凸多面体に付随するA超幾何系に関し、組合せ論と可換代数の技巧を駆使し、きわめて具体的に基底を表示することに成功した ([Adv. Math. 306 (2017), 303--327])。しかも、有限分配束の花束の概念を導入することから、その結果を著しく一般化している。他方、順序凸多面体に付随するA超幾何系の系列で、その階数が順序凸多面体の次元に関する多項式で押さえられるものを発見した。なお、当該論文では触れていないが、それらの順序凸多面体に関する結果は、ほとんどそのまま鎖凸多面体に焼き直すことができる。その結果、理論上の話ではあるものの、凸多面体論からホロノミック勾配法が適用可能な統計分布の、斬新な、豊富な類を提唱することができる舞台が設定されたと判断される。

● (ホロノミック勾配法) 一般のA超幾何分布について、確率パラメータの成す空間をAのトラス作用で割った空間Cと頻度の期待値の成す空間Eが同型となることを示し、空間Eは、分配多項式 (正規化定数) のニュートン多面体と一致することも証明し、Eの元の同型による空間Cへの逆像 (条件付き最尤推定値) を探索するための、ホロノミック勾配法型のアルゴリズムを開発した。その逆像は統計学で伝統的に使われている iterative proportional scaling により近似できることを示し、ホロノミック勾配法型のアルゴリズムのための初期値を与える方法を提唱した ([Adv. in Appl. Math. 99 (2018), 109--133])。以上の結果は、分割表についての既知な基礎定理の幾つかをA分布の枠組に一般化する重要なものであり、配置行列Aに付随するマルコフ基底の研究と双璧を成すべきA分布の多変量解析的な基礎を与える。他方、近似定理により、A超幾何多項式の漸近公式を、確率論的に導くことに成功している。

平均0, 共分散行列が異なる二つの Wishart 行列の比の最大固有値の累積分布関数は行列超幾何関数を使うと表現できる。高山信毅、竹村彰通らは、その行列超幾何関数が満たす微分方程式の数値計算を実行することから、その累積分布関数を計算する画期的な手法を与えることに成功した ([Journal of Multivariate Analysis 165 (2018), 270--278])。その結果は、二つの Wishart 行列の共分散行列が等しいか否かの Roy の検定への応用が可能である。なお、ソフトウェアパッケージをRのhgmパッケージに函数hgm.p2wishartとして公開している。

● (二項式イデアル) 有限半順序集合の多重鎖に付随するトーリックイデアルを探究し、多重鎖の長さの設定に依存せず、二次二項式から成るグレブナー基底が存在することと、その有限半順序集合の比較可能グラフが弦グラフであることの同値性を証明することに成功した ([European J. Combin. 59 (2017), 122--128])。とりわけ、弦グラフとなる比較可能グラフの代数的な特徴付けが得られたことは、きわめて独創的である。更に、そのトーリックイデアルの配置はVeronese配置の部分配置となるが、トーリック環は、ほとんど正規にならず、従来のグレブナー基底とは異なる振る舞いをする稀有なグレブナー基底が発掘されたことは特筆に値する。

研究計画調書に記載している研究目的は、第1に、可換代数、特に、二項式イデアルの斬新な潮流を誕生させること、第2に、ホロノミック勾配法の枠組で凸多面体論を再編成し、その研究に変革の嵐を誘うこと、である。第1の目的は、「反射的凸多面体」、「ポリオミノイデアルと分割表」、「二項式イデアル」の成果から達成されたと言える。第2の目的は、「実験計画と凸多面体」、「A超幾何系と凸多面体」の成果から達成されたと言える。なお、本基盤研究(S)は、「シチジー理論」、特に、単項式イデアルの冪のregularityの探究にも着手した。その「シチジー理論」の研究は、その後、基盤研究(A)19H00637「シチジー理論とシンボリック冪の現代的潮流を踏襲する可換環論の戦略的研究の展開」に踏襲されている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計22件（うち査読付論文 22件 / うち国際共著 10件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 J. Herzog, T. Hibi and G. Zhu	4. 巻 291
2. 論文標題 The relevance of Freiman's theorem for combinatorial commutative algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Z.	6. 最初と最後の頁 999--1014
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00209-018-2200-4">https://doi.org/10.1007/s00209-018-2200-4</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Hibi, K. Kimura and K. Matsuda	4. 巻 113
2. 論文標題 Extremal Betti numbers of edge ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Arch. Math. (Basel)	6. 最初と最後の頁 149--155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1007/s00013-019-01322-9">https://doi.org/10.1007/s00013-019-01322-9</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Hibi and A. Tsuchiya	4. 巻 157
2. 論文標題 Reflexive polytopes arising from perfect graphs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Combin. Theory Ser. A	6. 最初と最後の頁 233--246
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.02.012">https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.02.012</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Hibi and K. Matsuda	4. 巻 291
2. 論文標題 Regularity and h-polynomials of monomial ideals	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. Nachr.	6. 最初と最後の頁 2427--2434
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1002/mana.201700476">https://doi.org/10.1002/mana.201700476</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Takayama, K. Satoshi and A. Takemura	4. 巻 99
2. 論文標題 A-hypergeometric distributions and Newton polytopes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 109--133
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.aam.2018.05.001">https://doi.org/10.1016/j.aam.2018.05.001</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H. Hashiguchi, N. Takayama and A. Takemura	4. 巻 165
2. 論文標題 Distribution of the ratio of two Wishart matrices and cumulative probability evaluation by the holonomic gradient method	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Multivariate Analysis	6. 最初と最後の頁 270--278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.jmva.2018.01.002">https://doi.org/10.1016/j.jmva.2018.01.002</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Aoki and T. Hibi	4. 巻 8
2. 論文標題 Markov bases of two-way change-point models of ladder determinantal tables	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Algebr. Stat.	6. 最初と最後の頁 56--73
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.18409/jas.v8i1.55">http://dx.doi.org/10.18409/jas.v8i1.55</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya	4. 巻 121
2. 論文標題 Quadratic Groebner bases arising from partially ordered sets	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Math. Scand.	6. 最初と最後の頁 19--25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-26246">http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-26246</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hibi, K. Nishiyama and N. Takayama	4. 巻 306
2. 論文標題 Pfaffian systems of A-hypergeometric equations I: Bases of twisted cohomology groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 303 ~ 327
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.10.021">https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.10.021</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hibi and N. Li	4. 巻 118
2. 論文標題 Unimodular equivalence of order and chain polytopes	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Math. Scand.	6. 最初と最後の頁 5--12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-23291">http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-23291</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hibi and K. Matsuda	4. 巻 54
2. 論文標題 Quadratic Groebner bases of twinned order polytopes	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 European J. Combin.	6. 最初と最後の頁 187--192
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.12.014">https://doi.org/10.1016/j.ejc.2015.12.014</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Aoki, T. Hibi and H. Ohsugi	4. 巻 10
2. 論文標題 Markov-Chain Monte Carlo methods for the Box--Behnken designs and centrally symmetric configurations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Stat. Theory Pract.	6. 最初と最後の頁 59--72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1080/15598608.2015.1067172">https://doi.org/10.1080/15598608.2015.1067172</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -



1. 著者名 T. Hibi and A. Qureshi	4. 巻 59
2. 論文標題 Nonsimple polyominoes and prime ideals	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Illinois J. Math.	6. 最初と最後の頁 391, 398
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hibi, K. Matsuda, H. Ohsugi and K. Shibata	4. 巻 443
2. 論文標題 Centrally symmetric configurations of order polytopes	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 469, 478
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2015.06.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 V. Ene, J. Herzog and T. Hibi	4. 巻 22
2. 論文標題 Linear flags and Koszul filtrations	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 517, 530
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-3089028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 V. Ene, J. Herzog and T. Hibi	4. 巻 41
2. 論文標題 Linearly related polyominoes	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Algebraic Combin.	6. 最初と最後の頁 949, 968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-014-0560-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe	4. 巻 422
2. 論文標題 Algebraic study on Cameron--Walker graphs	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 257, 269
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2014.07.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 D. A. Cox, C. Haase, T. Hibi and A. Higashitani	4. 巻 21
2. 論文標題 Integer decomposition property of dilated polytopes	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Electron. J. Combin.	6. 最初と最後の頁 4.28, 17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and A. Qureshi	4. 巻 213
2. 論文標題 The binomial edge ideal of a pair of graphs	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Nagoya Math. J.	6. 最初と最後の頁 105, 125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.1017/S0027763000026192">http://dx.doi.org/10.1017/S0027763000026192</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hibi, K. Nishiyama, H. Ohsugi and A. Shikama	4. 巻 408
2. 論文標題 Many toric ideals generated by quadratic binomials possess no quadratic Gröbner bases	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 138, 146
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2013.09.039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hibi and L. Katthaen	4. 巻 142
2. 論文標題 Edge rings satisfying Serre's condition R_1	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 2537, 2541
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11973-3#sthash.fEhti3tv.dpuf">http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11973-3#sthash.fEhti3tv.dpuf</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe	4. 巻 42
2. 論文標題 Depth of initial ideals of normal edge rings	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Comm. Algebra	6. 最初と最後の頁 2908, 2922
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2012.760565">http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2012.760565</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Regularity and h-polynomials of monomial ideals
3. 学会等名 New Trends in Syzygies (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 グレブナー基底と医薬統計
3. 学会等名 構造活性相関シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Extremal Betti numbers of edge ideals
3. 学会等名 Commutative Algebra and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 単項式イデアルと二項式イデアル
3. 学会等名 日本数学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Binomial ideals arising from combinatorics
3. 学会等名 40th Autumn School in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 凸多面体と可換代数と統計の奏でる三重奏を聴く
3. 学会等名 日本数学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 竹村彰通
2. 発表標題 ホロノミック勾配法に関する研究
3. 学会等名 日本数学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 凸多面体の不易流行
3. 学会等名 日本数学会年会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 A Groebner basis characterization for chordal comparability graphs
3. 学会等名 Homological and Computational Methods in Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Gorenstein Fano polytopes and quadratic Groebner bases
3. 学会等名 Combinatorial and Experimental Methods in Commutative Algebra and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Regularity of edge ideals and dominating induced matchings
3. 学会等名 Free Resolutions, Betti Numbers, and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 大杉英史
2. 発表標題 トリークイデアルのグレブナー基底とその諸分野への応用
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 日比孝之
2. 発表標題 Stanley's Influence on Monomial Ideals
3. 学会等名 A conference in honor of Richard P. Stanley 's 70th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2014年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 T. Hibi and A. Tsuchiya (Eds.)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 World Scientific	5. 総ページ数 476
3. 書名 Algebraic and Geometric Combinatorics on Lattice Polytopes	

1. 著者名 T. Hibi (Ed.)	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Math. Soc. Japan	5. 総ページ数 436
3. 書名 The 50th Anniversary of Groebner Bases	

1. 著者名 J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 321
3. 書名 Binomial Ideals	

〔産業財産権〕

〔その他〕

日比孝之   研究科紹介   大阪大学大学院情報科学研究科 <a href="http://www.ist.osaka-u.ac.jp/japanese/introduction/professors/pure-and-applied-mathematics/combinatorics/takayuki-hibi.html">http://www.ist.osaka-u.ac.jp/japanese/introduction/professors/pure-and-applied-mathematics/combinatorics/takayuki-hibi.html</a>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	竹村 彰通  (Takemura Akimichi)  (10171670)	滋賀大学・データサイエンス教育研究センター・教授    (14201)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	青木 敏 (Aoki Satoshi) (90332618)	神戸大学・大学院理学研究科・教授  (14501)	
連携研究者	高山 信毅 (Takayama Nobuki) (30188099)	神戸大学・大学院理学研究科・教授  (14501)	
連携研究者	野呂 正行 (Noro Masayuki) (50332755)	立教大学・理学部・教授  (32686)	
連携研究者	大杉 英史 (Ohsugi Hidefumi) (80350289)	関西学院大学・理工学部・教授  (34504)	