

令和元年5月23日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26247002

研究課題名(和文) ガロワ表現の幾何的研究

研究課題名(英文) Geometric study of Galois representations

研究代表者

齋藤 毅 (Saito, Takeshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70201506

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 23,900,000円

研究成果の概要(和文)：正標数の代数多様体上の l 進層に対し、Beilinson氏が余接束上に定義した特異台にMilnor公式を用いて係数を定めて特性サイクルを定義した。さらに特性サイクルを使って層のオイラー数を表す指数公式を証明した。また、特性サイクルの固有射による順像との両立性を調べ、特性サイクルの公理的な特徴づけを得た。谷田川氏と共同で、特性サイクルが l によらないことも示した。また、整数環が相対完全交叉であるという仮定のもとで一般の付値環についても分岐群のフィルトレーションを構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学の対象の局所的に定義される不変量から大域的な不変量の性質を導くことは、幾何学の基本的な問題であり、その典型的なものとして指数公式がある。代数解析学では、偏微分方程式の局所的な性質を表すものとしてその特性サイクルが余接束上に構成され、これについても指数公式が知られている。本研究で得られた成果は、この特性サイクルの構成を代数的に行うものであり、エタール・コホモロジーの理論の基本的な定理となるものである。さらに整数論的な方向への発展も期待される。

研究成果の概要(英文)：For an l -adic sheaf on algebraic variety of positive characteristic, I defined its characteristic cycle by determining the coefficients of irreducible components of the singular support defined by Beilinson, using the Milnor formula. Using the characteristic cycle, I proved the index formula computing the Euler number. Studying the compatibility with proper push-forward, I obtained an axiomatic characterization of characteristic cycles. With Yatagawa, I proved that the characteristic cycle is independent of l . I constructed the filtration by ramification groups for a general valuation ring under the assumption that the integer ring is relatively of complete intersection.

研究分野：数論幾何学

キーワード：特性サイクル l 進層 エタール・コホモロジー 分岐

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

正標数の代数多様体上の 1 進層の特性サイクルについて、層の分岐に着目する方法で研究を進めていた。以前は特性サイクルを対数的余接束上に定義することを目標として、分岐理論を使って余次元 1 の成分を構成した。研究開始当初には、通常の余接束上で構成する方がよいことに気づき、代数曲面の場合の一般的な構成がほぼ得られていた。

2. 研究の目的

正標数の代数多様体や、混標数の離散付値環上のスキーム上の 1 進層の特性サイクルの理論を、幾何的方法と分岐理論的な方法を組み合わせて確立することが主要な目的である。研究開始時点で代数曲面の場合の構成はほぼ得られていたので、これを確立しそれを順次高次元化していくことを目標とした。さらにこの幾何的な構成を利用して、さらに数論的な応用を探ることも目的であった。

3. 研究の方法

幾何的方法と分岐理論的な方法を組み合わせて、特性サイクルを調べる。具体的には、幾何的方法としては、基礎スキームが一般の場合の消失輪体や、次元に関する帰納法を用いる。分岐理論的な方法としては、自己積の中の対角集合での爆発を用いる。これはリジッド幾何での多重円板の半径を小さくすることに相当し、局所体の絶対ガロワ群の分岐群によるフィルトレーションの構成で用いたものである。

4. 研究成果

最大の成果は、正標数の代数多様体上の 1 進層の特性サイクルの構成である。研究を開始してまもなく、Beilinson 氏が正標数の代数多様体上の 1 進層の特異台を余接束上に定義した。Deligne の考えにしたがって Milnor 公式を要請することで、特異台の各既約成分に係数を定義し、特性サイクルを定義した。基礎スキームが一般の場合の消失輪体と Deligne-Laumon による Swan 導手の半連続性が、構成の証明の主要な要素である。多様体の射が特異台に対して適正に横断的という定義を導入し、特性サイクルのひきもどしとの両立性を証明した。さらにこの性質を使って、特性サイクルと 0 切断の交点積として層の Euler 数を表す指数公式も証明した。1 進層に対する射の横断性も導入した。(論文 6)

特性サイクルの外部積との両立性を、Illusie 氏が証明した Thom-Sebastiani 公式を使って証明した。これは特性サイクルのスムーズ射によるひきもどしとの両立性の証明でも使われる。(論文 4)

曲面の場合に特性サイクルを定義し、指数公式を証明した。この結果は(論文 6)で一般化された。(論文 7)

多様体の自己積内の対角部分の因子での爆発を使って暴分岐を調べ、分岐群の次数商の指標と微分形式の関係を示した。(論文 6)ではこの結果を用いて、特性サイクルの余次元 1 の成分を計算した。(論文 5)

特性サイクルが、層の暴分岐で定まることを証明した。1 進層の特性サイクルが 1 によらないことも示した。(論文 3)

特性サイクルの固有射による順像との両立性の予想を定式化し、いくつかの場合に証明した。特性サイクルの公理的な特徴づけも与えた。(論文 2)

分岐群によるフィルトレーションの構成を大域化した。被約ファイバー定理と一般の基礎スキーム上の曲線の準安定還元定理を適用することで、離散付値環上の構成が一般化できることを示した。一般の付値環に対しても、拡大体の整数環が相対完全交叉であるという仮定の下では分岐群によるフィルトレーションが定義できることがわかった。(論文 1)

このほか、特性サイクルの固有射による順像との両立性について研究し、特異台の順像の次元が射の行き先の次元以下であるという仮定などの下で両立性を証明したが、論文は査読に時間がかかっているため未発表である。この結果は、Bloch の導手公式の予想を幾何的な場合には導くものである。また、特性サイクルが層の曲線への制限で定まるということも証明したが、論文は未完成である。

2018 年 9 月には、東京大学数理科学研究科で数論幾何の国際研究集会を主催した。2014 年から 2017 年には毎年、東京大学玉原国際セミナーハウスで数論幾何の合宿型の研究集会を主催した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

1. Ramification groups of coverings and valuations, Tunisian Journal of Mathematics Vol. 1, No. 3, 373-426, 2019, dx.doi.org/10.2140/tunis.2019.1.373

2. On the proper push-forward of the characteristic cycle of a constructible sheaf, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Volume: 97; 2018; Algebraic Geometry: Salt Lake City 2015, Part 2, 485-494
3. Wild ramification determines the characteristic cycle (with Yuri Yatagawa), Annales Scientifiques de l'Ecole normale superieure, 50, fascicule 4 (2017), 1065-1079.
doi:10.24033/asens.2339
4. Characteristic cycle of the external product of constructible sheaves, Manuscripta Mathematica, 154, Issue 1-2, 2017, pp 1-12. DOI: 10.1007/s00229-016-0913-4
5. Wild ramification and the cotangent bundle, Journal of Algebraic Geometry, 26 (2017), 399-473. DOI: <https://doi.org/10.1090/jag/681>
6. The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, Inventiones mathematicae, 207(2) (2017), 597-695, DOI10.1007/s00222-019-00876-3
7. Characteristic cycle and the Euler number of a constructible sheaf on a surface, Kodaira Centennial issue of the Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, vol 22, 2015 pp. 387-442.

[学会発表](計28件)

1. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Arithmetic and Algebraic Geometry 2019 – in honour of Professor Tomohide Terasoma's 60th birthday – January 25 (Fri), 2019,
2. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Tokyo-Lyon Satellite Conference in Number Theory February 21 (Wed) 2018
3. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, 第34回京都賞記念ワークショップ「基礎科学部門」2018年11月12日(月)京大数理研
4. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Arithmetic and Algebraic Geometry 2019 – in honour of Professor Tomohide Terasoma's 60th birthday – January 25 (Fri), 2019
5. Characteristic cycles and the conductor of direct image, Motives in Tokyo on the occasion of Shuji Saito's 60th Birthday March 26 (Mon) 2018.
6. Characteristic cycle of constructible sheaves and restriction to curves. "Arithmétique et géométrie algébrique", une conférence en l'honneur d'Ofer Gabber, 15 juin, 2018.
7. Characteristic cycle of constructible sheaves and restriction to curves. Cohomology of algebraic varieties CIRM October 19th, 2018.
8. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, 第12回 鹿児島 代数・解析・幾何学セミナー 2018年2月13日
9. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Local zeta functions and the arithmetic of moduli spaces : A conference in memory of Jun-Ichi Igusa, Johns Hopkins Univ., March 26, 2017
10. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Fukuoka International Conference on Arithmetic Geometry 2017 April 20.
11. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Algebraic Analysis in honor of Masaki Kashiwara's 70th birthday, IHES June 9, 2017.
12. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Algebraic Analysis and Representation Theory -- In honor of Professor Masaki Kashiwara's 70th Birthday, RIMS June 28, 2017.
13. Characteristic cycle of an l -adic sheaf, Regulators in Niseko 2017, 2017年9月4日

14. Characteristic cycles and the conductor of direct image, Interactions between Representation Theory and Algebraic Geometry, the University of Chicago, August 22 2017.
15. Characteristic cycles and the conductor of direct image, p 進コホモロジーと数論幾何学, 東京電機大学 2017年11月16日.
16. Characteristic cycles and the conductor of direct image, The Legacy of Carl Friedrich Gauss, Dec 18, 2017, at TSIMF, Sanya, China.
17. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Conference on Algebraic Number Theory, TSIMF Sanya, January 17, 2016.
18. On the characteristic cycle of a constructible sheaf, Tokyo-Seoul at KIAS, June 16-17, 2016.
19. On the characteristic cycle of a constructible sheaf, PANT Characteristic cycle of a constructible sheaf, July 13, 2016, Academia Sinica in Taipei.
20. On the functoriality of characteristic cycles of constructible sheaves, Hakodate workshop on arithmetic geometry 2016. Hakodate arena. June 1, 2016.
21. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Arithmetic and Algebraic Geometry, U. Tokyo, School of Math. Sci., January 31, 2015.
22. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Arithmetic Algebraic Geometry, May 15, 2015.
23. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Nordic Number-theory Network, Copenhagen June 16, 2015.
24. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Géométrie arithmétique, théorie des représentations et applications, 24 juin 2015.
25. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, AMS algebraic geometry summer institute, July 27, 2015.
26. On the characteristic cycle of an l -adic sheaf, Journées de géométrie arithmétique de l'IHÉS 25-26 septembre 2014 IHÉS.
27. The characteristic cycle and the singular support of an etale sheaf, Workshop of arithmetic geometry in Tohoku, October 30, 2014.
28. l 進層の特性サイクル, 数学会総合分科会, 特別講演, 関西大学, 2016年9月17日.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：加藤 和也

ローマ字氏名：Kazuya Kato

研究協力者氏名：Ahmed Abbès

ローマ字氏名：Ahmed Abbès

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。