

令和元年8月31日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26247005

研究課題名(和文) 特異点をもつ曲線・曲面・超曲面の微分幾何学的研究の推進

研究課題名(英文) Promotion of the study of curves, surfaces and hypersurfaces with singularities from the view point of differential geometry

研究代表者

梅原 雅顕 (UMEHARA, MASAOKI)

東京工業大学・情報理工学院・教授

研究者番号：90193945

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 25,300,000円

研究成果の概要(和文)：波面に現れる特異点が誘導する半正定値な計量としてKossowski計量が定義される。研究代表者は、研究分担者らとの共同研究で、計量が連接接束を誘導することを示し、その帰結としてKossowski計量をもつコンパクト多様体上のある種のガウス・ボンネ型の定理を得た。関連する研究として、空間曲線を与えたとき、その曲線をカスプ辺にもち、同じ第一基本形式をもつ実解析的写像が、一般に4個存在することを示した。部分多様体への応用としては、小林曲面と呼ばれる極大曲面のクラスを発見し、その曲面族は折り目特異点を経由して、時間的曲面への実解析的延長をもち、平面上の零平均曲率のグラフとして表されることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、ここ数年の研究代表者の特異点をもつ曲線・曲面の研究の継続・発展である。特異点論では従来、主に特異点の微分位相幾何学的な性質を研究してきましたが、本研究は「特異点にも曲がり具合を測る新たな不変量を導入し、特異点の微分幾何学的な解明」を目標としております。研究代表者等の研究を契機に、最近では特異点の研究者との研究交流も頻繁になされるようになり、今後、研究が進展すれば、幾何とトポロジーに新しい分野をもたらす可能性があり、国内外の関連する分野の研究者に大きな活力を与えると思われます。

研究成果の概要(英文)：Kossowski metrics characterize the singularities appeared on wave fronts. We (the head investigator and his research group) investigated global properties of them. In particular, we showed that Each Kossowski metric induces a unique coherent tangent bundle. Using this, two Gauss-Bonnet type formulas were obtained. Also, we showed the existence of four distinct cuspidal edges along a given space curve with the same first fundamental form in Euclidean 3-space. On the other hand, using analytic extension formula along fold singularities, we construct several families of real analytic entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何学 曲面 超曲面 特異点 極大曲面

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

筆者等の研究以前には「3次元双曲空間の平坦な曲面」、「3次元時空の極大曲面」などは完備な例が自明なものしか存在しないという理由により、ほとんど大域的な研究がなされていなかった。研究代表者等は論文

M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space, Pacific J. Math. 216 (2004), 149--175.

M. Umehara and K. Yamada, Maximal surfaces with singularities in Mikowski space, Hokkaido Math. J. 35 (2006), 13--40.

において、これらの曲面の研究対象を特異点を許す適切なクラスに設定することで3次元 Euclid 空間の極小曲面に対する Osserman の不等式の類似が得られ、等号成立は「曲面の各エンドが遠方で埋め込みであること」と同値であることを示した。さらに研究代表者は、連携研究者の佐治と研究分担者の山田との共同研究

K.Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, Ann. Math.169 (2009), 491--529.

を契機に、特異点自体の微分幾何学的性質に興味をもち、曲面および超曲面に現れる特異点の近傍におけるガウス曲率や断面曲率の振る舞いについて研究を行ってきたが、研究が進むにつれて特異点の第一基本形式だけから決まる内在的な性質の重要性を強く認識するようになった。応用面では、3次元時空における空間的極大曲面の特異点と時間的曲面への解析的な拡張とが密接に関係しているなど、多くの新しい特異点論と微分幾何学との関係を見つづついった。

### 2. 研究の目的

本研究は、ここ数年の筆者の特異点をもつ曲線・曲面・超曲面の研究の継続発展である。特異点論では従来おもに、特異点の位相幾何学的な振る舞いに注目してきたが、本研究では特異点に曲がり具合を測る新しい不変量を導入し、微分幾何学的側面から特異点を研究することを目標とする。本研究では国内外の研究者と協力しつつ、離散曲面など従来の特異点論や微分幾何の枠からこえた最近の先進的な研究も視野に入れつつ以下の3つのテーマについて研究を行う。

1. 曲面および超曲面に現れる特異点の微分幾何学的研究、
  2. 特異点を視野にいれたガウス曲率一定曲面および平均曲率一定曲面の研究、
  3. 平面単純閉曲線の4頂点定理の現代的解釈と3次元球面の平坦曲面への応用、
- これら3つのテーマは、相互に有機的に結びついている。各テーマについて年度ごとに目標を設定し段階的に最終目標の達成をめざす。

### 3. 研究の方法

以下、研究目的の欄に記した3つのテーマごとに研究の方法を記す。

#### [1] 曲面および超曲面に現れる特異点の微分幾何学的研究

(1-a) これまでの研究代表者等の共同研究で波面の  $A_k$  型 ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) の特異点を識別する有用な判定条件を与えた。その応用として  $A_k$  型特異点に  $k$ -次の特異主曲率を定義することができ、特に  $k=2$  のとき特異主曲率が、周囲の断面曲率と密接な関係にあることを明らかにした。そのときに用いた手法を発展させて、曲面あるいは超曲面としての特異点の微分幾何学的な性質を調べる研究を行う。

(1-b) 研究代表者は、これまでの研究で交叉帽子、カスプ辺、ツバメの尾が、線織面の場合には等長変形が可能であることに気づいた。この観察をふまえて、本研究では、Cauchy-Kovalevski の定理を用いて、実解析的な交叉帽子、カスプ辺、ツバメの尾における等長変形に関する研究を行う。

#### [2] 特異点を視野にいれたガウス曲率一定曲面および平均曲率一定曲面の研究

このテーマは研究代表者が長らく取り組んできたテーマであるが、特異点の研究という観点からはリーマン幾何の枠組みよりはローレンツ定曲率空間における曲面に興味深い対象が数多く存在する。これをふまえて以下の事項を主たる研究目標に掲げる。

(2-a) 3次元時空の空間的極大曲面の時間的曲面への型変化について、平均曲率一定曲面を含む、より一般的な曲面のクラスにおいて、どのような場合に型変化が生じるのかについて、具体例を調べて、その法則を解明する。曲面の型変化は、折り目特異点を介在するので、曲面の特異点の研究と結びついている。

(2-b) リーマン幾何あるいはローレンツ幾何の定曲率空間におけるガウス曲率一定曲面および平均曲率一定曲面について、特異点を許し、ある種の完備性を仮定した場合の曲面の漸近挙動についての解析を行う。

#### [3] 平面単純閉曲線の4頂点定理の現代的解釈と3次元球面の平坦曲面への応用。

研究代表者は、1996年頃から、研究協力者の Thorbergsson と共同研究で、平面単純閉曲線の 4 頂点定理について、外の空間を払拭し、1 次元球面  $S^1$  の上に単純な公理を設けて、この種の定理群の統一的な解釈を与えた。またこの種の定理の類似として、研究代表者は当時修士の学生だった村田氏との共同研究において Euclid 空間のある種の完備性を備えた平坦曲面について、ツバメの尾が最低 4 個生じる、とついう形の定理を示した。本研究では、従来の研究代表者のこの方面の研究を継続するとともに、応用として 3 次元球面の平坦な曲面であるクリフォード・トーラスの剛性に関する問題について、この方面からのアプローチを試みる。

#### 4. 研究成果

[1] 曲面および超曲面に現れる特異点の微分幾何学的研究について：

1. 研究代表者は、研究分担者らとの共同研究で 2 次元多様体上に Kossowski 氏が与えた半正定値計量に「Kossowski 計量」という名前をつけて、それが、筆者等が以前に導入した連接接束を一意的に誘導することを証明した。その応用として多様体がコンパクトになるとき、そこにガウス・ボンネ型の定理が成り立つことを示した(文献 15)。さらに上記の研究の高次元版として、 $n$ -次元多様体の Kossowski 計量を定義し、この計量が、多様体上に連接接束を誘導することを示した。その帰結としてコンパクトな偶次元の多様体上の Kossowski 計量について、ある種の高次元のガウス・ボンネ型の定理を得ることに成功した(文献 12)。

2. ところで Kossowski 計量は、波面に現れる特異点の第一基本計量に対応するが、曲面に現れるもっとも代表的な特異点である交叉帽子の第一基本形式は Kossowski 計量にはならない。そこで、研究代表者は特異点を特徴づける半定値計量として Whitney 計量を新しく定義した。さらに、この計量のもとで、コンパクトな 2 次元多様体に関するガウス・ボンネ型の定理を証明した(文献 15)。さらに実解析的な Whitney 計量を与えると、3 次元 Euclid 空間内の交叉帽子が存在し、その第一基本形式が、最初に与えた Whitney 計量と同じテイラー展開をもつことを示し、応用として、交叉帽子特異点の可算個の内的不変量の構成を行った(文献 3)。

3. 研究代表者は、研究分担者らとの共同研究で、一般型のカスプ辺の等長変形の自由度に関する研究を行った(文献 14)。また、その発展としてさらに、ツバメの尾の等長変形問題に取り組み Kossowski 計量の Euclid 空間への実現問題についてそのモジュライ空間も含めて十分な解明が進み論文にまとめ投稿した。さらに、空間曲線を与えたとき、その曲線をカスプ辺にもち、同じ第一基本形式をもつ実解析的写像が、一般に 4 個存在することを示し、論文にまとめて投稿した。

[2] 特異点を視野にいれたガウス曲率一定曲面および平均曲率一定曲面の研究

1. 研究代表者は、研究分担者らとの共同研究で、小林曲面と呼ばれる極大曲面のクラスを発見し、その曲面族は時間的曲面への実解析的延長をもち、平面上の零平均曲率のグラフとして表されることの証明に成功した(文献 11)。研究代表者は、応用数理学会の総合講演で、関連した研究成果について研究発表を行った。

研究代表者は研究分担者らとの共同研究で、一般の実解析的なローレンツ多様体の平均曲率が零でない一定の超曲面は、空間的なものが時間的なものに型変化を決して起こさないことを証明した(文献 9)。これは零平均曲率の場合とは全く異なる興味深い結果である。

2. また、その応用として、研究代表者は分担者の山田光太郎氏と 3 次元時空の極大曲面が型変化するとき、その点が退化する場合には、曲面はその退化点を通る光的直線を通る、という Klyachin の結果に別証明をつけることができた(文献 6)。さらに、その証明法を改良し、一般のローレンツ多様体の平均曲率が一定の超曲面にまで拡張することに成功した(文献 2)。これは、本研究で得た最も深い成果の 1 つである。

[3] 平面単純閉曲線の 4 頂点定理の現代的解釈と 3 次元球面の平坦曲面への応用。

連携研究者の北川氏(宇都宮大)および榎本一之氏(東京理大)と、3 次元球面内のクリフォード・トーラスの剛性予想について、部分的な解決を与えることができた。これは現在投稿中である。また、これに関連して安藤氏(熊本大)と大学院生の藤山氏との共同で、3 次元 Euclid 空間内の正則曲面で、1 点のみ  $C^1$  級で、その点での曲率線の流れの指数が任意の半整数値をとるものを構成した。この具体例は、 $C^1$  級の臍点についての Loewner 予想の初めての反例を与えている(文献 10)。

以上の研究の推進と発展をふまえて、研究分担者の間下、橋本、大仁田は毎年、研究集会を開催した。代表者も山田氏と連携して 2 つの国際研究集会を主催した。1 つは 2016 年 2 月に東工大で開催した Japan-Austria Joint Workshop 「Transformations and Singularities」で、もう一つは 2017 年 9 月に Institute de Ciencias Matematicas (マドリッド)で開催した The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry である。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 18 件)

1. S.Fujimori, Y.Kawakami, M.Kokubu, W.Rossmann, M.Umehara and K.Yamada, Analytic

- extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space, to appear in Math. J. Okayama Univ., (arXiv:1507.06695) ,(査読有).
2. M. Umehara and K. Yamada, Hypersurfaces with light-like points in a Lorentzian manifold, to appear in J. Geometric Analysis (arXiv:1707.07396) ,(査読有).
  3. A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara, K. Yamada, Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications, Hokkaido Mathematical Journal 48 (2019), 1-44, (査読有).
  4. M. Umehara and K. Yamada, Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications, in Lorentzian Geometry and Related Topics, Springer Proceedings of Mathematics and Statistics 211 (2018), 253-273, (査読有).
  5. 梅原雅頭, 特異点の微分幾何学-- 3次元時空の極大曲面をテーマにして--, 応用数理学会誌のフォーラムへの寄稿論文, 「応用数理」28巻2号 (2018), 86--89, (査読有).
  6. M. Umehara and K. Yamada, Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications Lorentzian Geometry and Related Topics, (eds. M.A. Canadas-Pineto et al.), Springer (2017) ,(査読有).
  7. S. Fujimori, U. Hertrich-Jeromin, M. Kokubu and M. Umehara and K. Yamada, Quadrics and Scherk towers, Monatsh Math. 186 (2017), 249-279, (査読有).
  8. S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space, Osaka J. Math. 54 (2017), 249--272, (査読有).
  9. A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times, Diff. Geom. and its Appl. 52 (2017), 64--77, (査読有).
  10. N. Ando, T. Fujiyama and M. Umehara,  $C^1$ -umbilics with arbitrarily high indices, Pacific Journal of Mathematics, 288 (2017), dx.doi.org/10.2140/pjm.2017.288.1, (査読有).
  11. S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, Zero mean curvature entire graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space, Q. J. Math. 67 (2016) 801–837, (査読有).
  12. K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications, J. Math. Soc. Japan. 69 (2017) 417-457, (査読有).
  13. L.F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts, Geometry and Topology of manifolds, 247-281, Springer Proc. Math. Stat. 154, Springer Tokyo, 2016 ,(査読有). (The proceedings of China-Japan Geometry Conference "Geometry and Topology of Manifold---The 10th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan 2014.)
  14. K. Naokawa, M. Umehara, and K. Yamada, Isometric deformations of cuspidal edges, Tohoku Math. J. 68 (2016) 73--90 ,(査読有).
  15. M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Intrinsic properties of singularities of surfaces, International Journal of Math. 26, 1540008 (2015) [34 pages] ,(査読有).
  16. S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics, Math. J. Okayama Univ. 57 (2015), 173--200 ,(査読有).
  17. S. Fujimori, Y. W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line, Osaka J. Math. 52 (2015), 285--297 ,(査読有).
  18. U. Hertrich-Jeromin, Y. Suyama, M. Umehara and K. Yamada, A duality for conformally flat hypersurfaces, Beitrage zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry 56 (2015), 655-676 ,(査読有).

[学会発表](計5件)

1. 発表者: 梅原雅頭

タイトル: Hypersurfaces with light-like points in Lorentzian manifolds

研究集会名: 15th International Workshop on Real and Complex Singularities

発表日と場所: 2018.7.27 (55分講演), サンパウロ大学サンカルロス校

2. 発表者: 梅原雅頭

タイトル: Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space ,

研究会名: International workshop "Geometry of Submanifolds and Integrable System"

発表日と場所：2018.3.29（一時間講演），大阪市立大学理学部

3. 発表者：梅原雅頭

タイトル：特異点の微分幾何学 3次元時空の極大曲面をテーマにして

研究会名：日本応用数理学会 2017年度 年会・総合講演

発表日と場所：2017.9.7（一時間講演），武蔵野大学 有明キャンパス

4. 発表者：梅原雅頭

タイトル：特異点をもつ曲面の幾何学

研究会名：第63回幾何学シンポジウム，

発表日と場所：2016.8.30（一時間講演），岡山大学

5. 発表者：梅原雅頭

タイトル：Indices of isolated umbilics on surfaces，

研究会名：Geometric Analysis in Geometry and Topology

発表日と場所：2015.11.12（一時間講演），東京理科大学・森戸記念館

〔図書〕(計2件)

1. M. Umehara and K. Yamada, Differential Geometry of curves and Surfaces (2015), World Scientific Co. Ltd (曲線と曲面, 裳華房の英訳),
2. 梅原, 佐治, 山田共著, 「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」(現代数学シリーズ19), 丸善出版 (2017).

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等 分担者の間下氏が世話人として毎年開催した越後湯沢の部分多様体の研究集会の記録は <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/yuzawa.html> にあります.

## 6. 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：山田 光太郎

ローマ字氏名：Yamada Kotaro

所属研究機関名：東京工業大学

部局名：理学院

職名：教授

研究者番号(8桁)：10221657

研究分担者氏名：間下 克哉

ローマ字氏名：Mashimo Katuya

所属研究機関名：法政大学

部局名：理工学部

職名：教授

研究者番号(8桁)：50157187

研究分担者氏名：橋本 英哉

ローマ字氏名：Hashimoto Hideya

所属研究機関名：名城大学

部局名：理工学部

職名：教授

研究者番号(8桁)：60218419

研究分担者氏名：大仁田 義裕  
ローマ字氏名： Ohnita Yoshihiro  
所属研究機関名：大阪市立大学  
部局名： 理学研究科  
職名： 教授  
研究者番号（8桁）：90183764

研究分担者氏名：Rossman W.F. (H26 年度のみ)  
ローマ字氏名：Rossman W.F.  
所属研究機関名：神戸大学  
部局名：理学研究科  
職名：教授  
研究者番号（8桁）：50284485

研究分担者氏名：小池 直之(H27 年度のみ)  
ローマ字氏名：Koike Naoyuki  
所属研究機関名：東京理科大学  
部局名：理学部第一部  
職名：教授  
研究者番号（8桁）：00281410

研究分担者氏名：小磯 深幸 (H28 年度のみ)  
ローマ字氏名：Miyuki Koiso  
所属研究機関名：九州大学  
部局名：マス・フォア・インダストリ研究所  
職名：教授  
研究者番号（8桁）：10178189

(2)研究協力者  
研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：