

令和元年5月28日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(A)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：26247014

研究課題名（和文）古典場の理論における臨界相互作用の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical Analysis of Critical Interactions in Classical Fields

研究代表者

小澤 徹 (OZAWA, Tohru)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 30,710,000円

研究成果の概要（和文）：古典場の理論における臨界相互作用について、非相対論的場の方程式および半相対論的場の方程式、またそれらの解析において重要な評価の基礎をなす不等式について研究した。非線型シュレディンガー方程式に対してはゲージ不変性が破綻すると時間大域解が存在しない（爆発現象）等が起こる様子を記述し、その機構を常微分方程式の見地から解明した。

また、プレジス・ガルの論法を、高階ソボレフノルムに繰り込み項を導入した補正高階エネルギーを定義する事に依って、従来よりも高次の冪を持った非線型シュレディンガー方程式や半相対論的場の方程式の時間大域解の存在を証明する事が出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

場の古典論に現れる方程式は、ド・ブローイの視点により、物質を波と捉えてモデル化した方程式である。従って、場の方程式の解の存在を示すことは、物質が現象として意味を持っていることの証明を与えることと同値となり、研究成果の学術的意義・社会的意義を示すこととなる。

研究成果の概要（英文）：Regarding the critical interactions in the theory of classical fields, we have studied equations of nonrelativistic fields and of semirelativistic fields and related inequalities appearing in the analysis of those equations. As for the nonlinear Schrödinger equations, we proved blow-up of solutions in non-gauge invariant setting.

Moreover, we have improved the Brezis-Gallouët argument by renormalizing higher order energy to cover higher order nonlinearities in the global Cauchy problem for nonrelativistic and semirelativistic equations.

研究分野：数学解析

キーワード：調和解析 漸近解析 非線形解析

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

古典場の理論とは、物質場・電磁場・重力場を波動の場として記述する理論である。非線型クライン・ゴルドン場、非線型シュレディンガー場、非線型ディラック場、及びマクスウェル・クライン・ゴルドン場を記述する（実または）複素スカラー場やゲージ場が代表的な対象であり、それらの場は数学的にはそれぞれ、自己相互作用の下での非線型クライン・ゴルドン方程式、非線型シュレディンガー方程式、非線型ディラック方程式、及びスカラー場とゲージ場の相互作用系としてのマクスウェル・クライン・ゴルドン（連立）方程式の解として認識されるものであり、時空変数を独立変数とする（実または）複素数値（またはベクトル値）関数の形を取って表現される。

波動場としての古典場は本来連立方程式系（システム）としてその本質的な姿を現すものと考えられているものの、その数学的理論は Segal 以来依然として大きな課題であり、未だ完成の域には達していない。例えばマクスウェル・クライン・ゴルドン方程式系には、決定系として考えるためにゲージ条件を一つ課す必要があるが、初期値問題の適切性(well-posedness)を保証する最大のソボレフ空間が未だに特定されていない。

これが研究開始当初の背景であった。

2. 研究の目的

このような背景や動機から、本来のモデル（或いはその近似モデル）に沿った連立方程式の研究が近年盛んに行われるようになってきている。本研究は、このような世界的研究動向にあって、臨界的相互作用の代数的特徴付け、変分解析的手法による最良定数の特徴付け、函数空間論における臨界的埋蔵の特徴付けなどを明らかにすることが研究の目的である。

3. 研究の方法

本研究計画の研究目的を達成するために (a) 漸近解析 (b) 調和解析・実解析 (c) 変分解析の三つのグループに分け、複数のグループで共同で取り組む課題を中心に据えつつ、各グループ独自の研究を深め、他のグループの対応する理論を全体像として理解するための研究体制を整備する。その相互作用の場を早稲田大学に設ける。海外共同研究者との共同研究を推進するため相互の訪問・招聘を行う。必要に応じて専門家を国内外から招聘し、専門知識の提供を受けたり本研究計画の進展中の研究に対する意見を求める。発展性を見込める新しいテーマを選んで大学院生や若手研究者等を共同研究に参加させ、その分野の将来の担い手となるような次世代研究者の育成にも配慮しつつ、研究目的が具体的に達成されるよう組織的に取り組む。

4. 研究成果

古典場の理論における臨界相互作用について、非相対論的場の方程式および半相対論的場の方程式、またそれらの解析において重要な評価の基礎をなす不等式について研究した。非線型シュレディンガー方程式に対してはゲージ不変性が破綻すると時間大域解が存在しない（爆発現象）等が起こる様子を記述し、その機構を常微分方程式の見地から解明した。

また、ブレジス・ガルエの論法を、高階ソボレフノルムに繰り込み項を導入した補正高階エネルギーを定義する事に依って、従来よりも高次の冪を持った非線型シュレディンガー方程式や半相対論的場の方程式の時間大域解の存在を証明する事が出来た。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 74 件) (全て査読有)

- ① K. Fujiwara, V. Georgiev, T. Ozawa
Higher order fractional Leibniz rule, J. Fourier Anal. Appl., **24** (2018), 650-665.
DOI:10.1007/s00041-017-9541-y
- ② N. Bez, C. Jeavons, T. Ozawa, M. Sugimoto
Stability of trace theorems on the sphere, J. Geom. Anal., **28** (2018), 1456-1476.
DOI:10.1007/s12220-017-9870-8
- ③ K. Li, T. Ozawa, B. Wang
Dynamical behavior for the solutions of the Navier-Stokes equation, Commun. Pure Appl. Anal., **17**, Number 4, (2018), 1511-1560. DOI:10.3934/cpaa.2018073
- ④ J. Bellazzini, T. Ozawa, N. Visciglia
Ground states for semi-relativistic Schrödinger-Poisson-Slater energy, Funkcialaj Ekvacioj, **60**(2017), 353-369. DOI:10.1619/fesi.60.353
- ⑤ S. Machihara, T. Ozawa, H. Wadade
Remarks on the Rellich inequality, Math. Z., **286**(2017), 1367-1373.
DOI:10.1007/s00209-016-1805-8
- ⑥ M. Hayashi, T. Ozawa
On Landau-Kolmogorov inequalities for dissipative operators, Proc. AMS, **145**(2017), 847-852. DOI:10.1090/proc/13380

- ⑦ M. Hayashi, T. Ozawa
Well-posedness for a generalized derivative nonlinear Schrödinger equation,
J. Differential Equations, **261**(2016), 5425–5445. DOI:10.1016/j.jde.2016.08.018
- ⑧ T. Ozawa, N. Visciglia
An improvement on the Brézis–Gallouët technique for 2D NLS and 1D half-wave equation,
Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, **33**(2016), 1069–1079.
- ⑨ J. Bellazzini, M. Ghimenti, T. Ozawa
Sharp lower bounds for Coulomb energy, Math. Research Letters, **23**(2016), 621–632.
DOI:10.4310/MRL.2016.v23.n3.a2
- ⑩ N. Bez, C. Jeavons, T. Ozawa
Some sharp bilinear space-time estimates for the wave equation, Mathematika, **62**(2016), 719–737. DOI:10.1112/S0025579316000012
- ⑪ K. Fujiwara, T. Ozawa
Weighted L^p -boundedness of convolution type integral operators associated with
bilinear estimates in the Sobolev spaces, Journal of the Mathematical Society of
Japan, **68**(2016), 169–191. DOI: 10.2969/jmsj/06810169
- ⑫ N. Ioku, M. Ishiwata, T. Ozawa
Sharp remainder of a critical Hardy inequality, Archiv der Mathematik, **106**(2016),
65–71. DOI:10.1007/s00013-015-0841-7
- ⑬ K. Fujiwara, S. Machihara, T. Ozawa
On a system of semirelativistic equations in the energy space, Commun. Pure Appl.
Anal., **14**(2015), 1343–1355.
- ⑭ K. Fujiwara, S. Machihara, T. Ozawa
Well-posedness for the Cauchy problem for a system of semirelativistic equations,
Commun. Math. Phys., **338**(2015), 367–391. DOI:10.1007/s00220-015-2347-3
- ⑮ R. Carles, T. Ozawa
Finite time extinction for nonlinear Schrödinger equation in 1D and 2D, Commun. PDE.,
40(2015), 897–917. DOI:10.1080/03605302.2014.967356
- ⑯ G. Hoshino, T. Ozawa
Analytic smoothing effect for nonlinear Schrödinger equation with quintic
nonlinearity, J. Math. Anal. Appl., **419**(2014), 285–297.
DOI:10.1016/j.jmaa.2014.04.057
- ⑰ K. Fujiwara, T. Ozawa
Stability of the Young and Hölder inequalities, J. Ineq. Appl., **2014**(2014): 162,
DOI:10.1186/1029-242X-2014-162
- ⑱ T. Ozawa, K. Rogers
A sharp bilinear estimate for the Klein–Gordon equation in \mathbb{R}^{1+1} , Int. Math. Res. Not.
IMRN **2014**(2014), 1367–1378. DOI:10.1093/imrn/rns254

[学会発表] (計 66 件)

- (1) Tohru Ozawa
Cauchy problem for the quasilinear evolution equation of transverse wave model
PDE Workshop Waseda – GSSI, L’Aquila–Pisa (招待講演) (国際学会)
February 21, 2019
University of Pisa, Pisa, Italy
- (2) K. Tanaka
A singular perturbation problem for nonlinear Choquard equations
PDEs at Valparaiso (招待講演) (国際学会)
December 10, 2018
Valparaiso, Chile
- (3) Shuji Machihara
The range of Sobolev regularity for the well-posedness of the Dirac–Klein–Gordon
system in 1d, Workshop on nonlinear wave equations and related topics in Kobe, (招
待講演)
November 19, 2018
Kobe University, Kobe, Japan
- (4) Tohru Ozawa
Improved Hardy inequalities
Mathematical Fluid Mechanics and Related Topics – in honor of Professor Hideo
Kozono’s sixtieth birthday – (招待講演) (国際学会)
September 6, 2018
Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan

- (5) Tohru Ozawa
Improved Hardy inequalities
Nonlinear Dispersive Equations at Florianopolis (招待講演) (国際学会)
July 28, 2018
Hotel Mar de Canasvieiras, Florianopolis, Brazil
- (6) Tohru Ozawa
Improved Hardy inequalities
Celebrating Approximate 60s -- An International Conference on Nonlinear PDEs and
Its Applications at NYU Shanghai (招待講演) (国際学会)
June 19, 2018
NYU Shanghai, Shanghai, China
- (7) Kazunaga Tanaka
A singular perturbation problems for generalized Choquard equations
PDE seminar, (招待講演) (国際学会)
May 10, 2018
Tianjin University, Tianjin, China
- (8) Tohru Ozawa
On improved Hardy inequalities
Workshop in Hangzhou 2018 (招待講演) (国際学会)
April 8, 2018
Zhejiang University, Hangzhou, China
- (9) Tohru Ozawa
Blowup solutions for the derivative nonlinear Schrödinger equation on torus
Recent topics on PDEs (招待講演) (国際学会)
November 17, 2017
Chuo University, Tokyo, Japan
- (10) Tohru Ozawa
Lifespan of periodic solutions to nonlinear Schrödinger equations
RIMS Workshop Nonlinear Wave and Dispersive Equations (招待講演) (国際学会)
August 30, 2017
Kyoto University, Kyoto, Japan
- (11) Kazunaga Tanaka
Singular perturbation problem for generalized Choquard equations
The Third Congress of the PRIMA, the Pacific Rim Mathematical Association
(session: Nonlinear Elliptic PDEs and Systems) (招待講演) (国際学会)
August 14-18, 2017
Oaxaca, Mexico
- (12) Shuji Machihara
Global well-posedness for one dimensional Chern-Simons-Dirac system in L^p
Nonlinear PDE for Future Applications -Hyperbolic and Dispersive PDE- (招待講演)
(国際学会)
July 25, 2017
東北大学片平キャンパス 宮城県・仙台市
- (13) Tohru Ozawa
Hardy inequalities in $L^p(\mathbb{R}^n)$
Zhejiang-Tohoku International Workshop for Nonlinear Partial Differential Equations
2017 (招待講演) (国際学会)
May 16-18, 2017
東北大学 宮城県・仙台市
- (14) Tohru Ozawa
ON LANDAU-KOLMOGOROV INEQUALITIES FOR DISSIPATIVE OPERATORS
Nonlinear Partial Differential Equations and Mathematical Physics Workshop (招待
講演) (国際学会)
December 5-9, 2016
Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Sanya, China
- (15) Tohru Ozawa
Remarks on the Rellich inequality
The 13th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics (招
待講演) (国際学会)
November 30-December 2, 2016
Technical University Darmstadt, Darmstadt, Germany
- (16) Shuji Machihara
Ill-posedness results for the 1d Dirac-Klein-Gordon system

- Interactions Between Harmonic and Geometric Analysis (招待講演) (国際学会)
November 29, 2016
SAITAMA UNIVERSITY SATELLITE CAMPUS TOKYO STATION COLLEGE 東京都・千代田区
- (17) Kazunaga Tanaka
Nonlinear elliptic problems in singularly perturbed cylindrical domains,
Asymptotic Patterns in Variational Problems: PDE and Geometric Aspects (招待講演)
(国際学会)
September 26, 2016
Hotel Hacienda Los Laureles, Oaxaca, Mexico
- (18) Tohru Ozawa
Life span of solutions to nonlinear Schrödinger equations on torus
International Conference on Navier–Stokes equations and related PDEs : In honor of
the 60th birthday of Professor Hi Jun Choe (招待講演) (国際学会)
June 25, 2016
NIMS 韓国, テジヨン, Korea
- (19) Kazunaga Tanaka
Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrödinger equations concentrating
at a potential well
Workshop on Nonlinear PDEs and Calculus of Variations (招待講演) (国際学会)
May 30, 2016
Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China
- (20) Tohru Ozawa
Quadratic interactions in Dispersive Systems
Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) 「Recent Trends in Nonlinear
Evolution Equations」 (招待講演) (国際学会)
April 4–8, 2016
数学会合国際センター(CENTRE INTERNATIONAL DE RENCONTRES MATHÉMATIQUES) フランス・
マルセイユ
- (21) Tohru Ozawa
Life span of solutions to nonlinear Schrödinger equations on torus
Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
March 24–27, 2016
Zhejiang Normal University, Zhejiang province, China
- (22) Kazunaga Tanaka
A new deformation method for singular perturbation problems and applications
3rd Chile–Japan Workshop on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
December 8, 2015
大阪大学豊中キャンパスシグマホール, 大阪府・吹田市
- (23) Tohru Ozawa
On the Hardy type inequalities
Second Workshop on Nonlinear Dispersive Equations (招待講演) (国際学会)
October 6–9, 2015 (10/9)
IMECC-UNICAMP, Campinas, Brazil
- (24) Tohru Ozawa
On the Hardy type inequalities
The 3rd CAU–Kyoto U. Joint Workshop on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
September 21–22, 2015 (9/21)
Seo-gwi-po KAL hotel, Jejudo, Korea
- (25) Kazunaga Tanaka
Singular perturbation problems for nonlinear elliptic problems
Workshop in Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
September 7, 2015
Universite Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium
- (26) Tohru Ozawa
Quadratic interactions in systems of dispersive equations
10th International ISAAC Congress Session 10 : Harmonic Analysis and PDEs (招待
講演) (国際学会)
August 3–8, 2015(8/5)
University of Macau, Taipa, Macau, China
- (27) Shuji Machihara
Well-posed and Ill-posed results for the 1d Dirac–Klein–Gordon system
Harmonic Analysis and Partial Differential Equations(ICMS) (招待講演) (国際学会)
July 27, 2015

エジンバラ(15 South College Street), スコットランド

(28) Tohru Ozawa

Hardy type inequalities

workshop on partial differential equations and numerical analysis (Nonlinear PDE

Meeting at Yanbian University July 2015, Yanji) (招待講演) (国際学会)

July 8-9, 2015

Yanbian University, Jilin Province, China

(29) Kazunaga Tanaka

Singular perturbation problems for NLS systems and nonlinear elliptic problems in perturbed cylindrical domains

Workshop on Variational and Topological Methods in the Study of Nonlinear Problems

(招待講演) (国際学会)

July 1, 2015

Franche-Comte 大学, Besancon, France

[図書] (計 2 件)

- ① 宇佐美 広介, 齋藤 保久, 原下 秀士, 眞中 裕子, 和田出 秀光, 培風館, 理工系微分方程式—解き方から基礎理論への入門, 2017, 201 頁 (77 頁-116 頁)
- ② 小澤 徹, サイエンス社, 数理解物理学としての微分方程式序論, 2016, 192 頁

[産業財産権]

なし

[その他]

ホームページ等

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

6. 研究組織

研究分担者氏名：田中 和永

ローマ字氏名：TANAKA, Kazunaga

所属研究機関名：早稲田大学

部局名：理工学術院

職名：教授

研究者番号 (8 桁)：20188288

研究分担者氏名：町原 秀二

ローマ字氏名：MACHIARA, Shuji

所属研究機関名：埼玉大学

部局名：理工学研究科

職名：教授

研究者番号 (8 桁)：20346373

研究分担者氏名：和田出 秀光

ローマ字氏名：WADADE, Hidemitsu

所属研究機関名：金沢大学

部局名：理工研究域 機械工学系

職名：准教授

研究者番号 (8 桁)：00466525

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：片山 聡一郎

ローマ字氏名：KATAYAMA, Soichiro

研究協力者氏名：砂川 秀明

ローマ字氏名：SUNAGAWA, Hideaki

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。